E. J. LEMMON

UPOZNAVANJE SA LOGIKOM

PRILOZI

PRIOR • HEIJENOORT • BRODY



Nije lako, a možda nije čak ni korisno, objasniti ukratko šta je to logika. Kao i većina predmeta, ona obuhvata mnoge različite vrste problema i nema jasno utvrđene granice; jednim krajem ona zadire u matematiku, drugim u filozofiju. Najbolji način da se otkrije šta je to logika jeste da se sa njom uhvati u koštac. Bezmalo, tek nekoliko opštih ocena o ovom predmetu može biti od pomoći da se pruži osnova za dalji tok ove knjige.

Logika se uglavnom bavi osnovanošću i neosnovanošću argumenata (with the soundness and unsoundness of arguments) i pokušava da sačini što je moguće preciznije uslove pod kojima je neki argument - bez obzira na oblast izučavanja - prihvatljiv. Ovaj stav iziskuje izvesno pojašnjenje: prvo, neophodno je da kažemo šta je to argument; drugo, šta shvatamo pod osnovanošću; treće, kako možemo preciznije sačiniti uslove za osnovanu argumentaciju; i četvrto, kako ovi uslovi mogu biti nezavisni od oblasti unutar koje je argumentacija derivirana. Nastavimo onda dalje polazeći od ovih tema.

Upoznavanje sa logikom

ΦΙΛΟΣΟΦΟΘΗΚΗ
ΑΛΗΘΕΙΑ

urednik
BOGOLJUB ŠIJAKOVIĆ

2

E. J. Lemmon
Beginning Logic (1965)

Addenda (1967):
A. N. Prior, J. van Heijenoort, B. A. Brody

PHILOSOPHOTHECA
ALETHEIA

E. J. LEMMON

Upoznavanje sa logikom

PRILOZI

A. N. Prior: MODALNA LOGIKA
A. N. Prior: POLIVALENTNA LOGIKA
A. N. Prior: DEONTIČKA LOGIKA
John van Heijenoort: LOGIČKI PARADOKSI
Boruch A. Brody: GLOSAR LOGIČKIH TERMINA

s engleskog preveo
VLADIMIR MARKO



NIKŠIĆ : *DRUŠTVO FILOSOFA I SOCIOLOGA CRNE GORE*
1995

E. J. LEMMON
Beginning Logic (1965)
Indianopolis : Hackett Publishing Company 1978, 1980.

The Encyclopedia of Philosophy, vols. 1-8. Editor in Chief PAUL EDWARDS, New York : Macmillan, London : Collier Macmillan 1967, reprint 1972:

vol. 4, 509-513: A. N. PRIOR, "Logic, Deontic";
vol. 5, 1-5: A. N. PRIOR, "Logic, Many-Valued";
vol. 5, 5-12: A. N. PRIOR, "Logic, Modal";
vol. 5, 45-51: JOHN VAN HEIJENOORT, "Logical Paradoxes";
vol. 5, 57-77: BORUCH A. BRODY, "Logical Terms, Glossary of".

SADRŽAJ

PRILOZI

PREDGOVOR

Materijal za ovu knjigu proizašao je iz kurseva-predavanja održanih na Univerzitetu u Oxfordu između 1958. i 1962, kao i na Univerzitetu u Texasu, tokom proletnjeg semestra 1961, gde sam najvećim delom imao dovoljno vremena da ih zabeležim. Takođe sam ih nakon toga iskoristio za jednosemestarski kurs u Claremontu, California, kao i za kurs letnje škole na California univerzitetu, Los Angeles. Ova knjiga je na prvom mestu namerena za upotrebu u okviru tromesečnih ili jednosemestarskih uvodnih kurseva logike na univerzitetskom nivou, mada ne vidim nijedan razlog zašto ne bi mogla biti korišćena i u školama, a nadam se i očekujem da će logika u sve većoj meri predstavljati predmet podučavanja i na školskom nivou. Nikakvo prethodno znanje bilo filozofije ili matematike (osim sposobnosti računanja i prepoznavanja nekih elementarnih algebarskih jednačina) nije bilo pretpostavljeno i knjiga je pre namenjena onima kojima se matematičko mišljenje čini teškim, nego onima kojima se čini lakim. Ona bi tako i za razboritog advokata, koji se bavi sopstvenom strukom, u velikoj meri trebalo da bude pristupačna.

Napomena za studenta

Svrha ove knjige jeste da studentu koji dobro vlada iskaznim i predikatskim računom pruži osnove na kojima je zasnovana savremena simbolička logika. U skladu sa tim, naglasak je stavljen na aktualnu tehniku pronalaženja dokaza (proof-discovery). Unutar ovoga okvira, pokušao sam da formalnu strogost u što manjoj meri žrtvujem intuitivnoj prihvatljivosti, mada je u nekim prilikama i na ranijim stupnjevima, to ponekada učinjeno sa krajnjim oprezom. Rezultat ovoga pokušaja predstavlja tekst koji je verovatno suvoparan za čitanje ali koji ne bi trebalo da je težak za savlađivanje. S druge strane, uvrstio sam izvesne u većoj meri teorijske odeljke, delom sa tom namerom da ukažem

na stil razvijenijeg dela logike, a delom kao izazov boljim studentima koji su možda skloni da ovaj predmet dodatno izučavaju (bibliografija i beleške koji prate tekst oblikovani su tako da mu pruže upute u tom smislu). Posebno su Poglavlje 2, Odeljci 4 i 5, Poglavlje 4, Odeljak 2, dobrim delom teži od ostalog dela ove knjige i običan čitalac bi trebalo da ih mudro pretrči (t.j. da ih pročita bez posebnog zadržavanja): ništa od onoga što ih sledi nije u suštinskoj meri nezaobilazno vezano za njihov sadržaj.

U osnovnim crtama, u Poglavlju 1 izučavamo neke elementarne dokaze iskaznog računa i upoznajemo se neposredno sa njegovim pravilima derivacije. U Poglavlju 2, nakon savladavanja rečnika i gramatike ovoga računa, student se upoznaje sa istinosnim tablicama, koje su zatim korištene kao nezavisna kontrola osnovanosti i kompletnosti ovih pravila. Poglavlje 3 predstavlja pravila predikatskog računa i njegove osnovne rezultate, na isti delimično neformalan način kako je to obrađeno i kod iskaznog računa u Poglavlju 1. Poglavlje 4 počinje skiciranjem teorije predikatskog računa (Odeljci 1 i 2), ali nastavlja sa njegovim primenama: prvo, s obzirom na identitet; drugo, s obzirom na tradicionalnu teoriju silogizma; treće, s obzirom na svojstva relacija. Normalne forme, čiji kratak pregled je uvršten u mnoge kurseve logike ali kojima se u logičkim tekstovima ne posvećuje velika pažnja, prebačene su u Dodatak A (koji se može čitati nakon Poglavlja 2, Odeljka 3). Dodatak B uvođenje je u teoriju klasa i može predstavljati sponu između ovoga i tekstova koji su na višem nivou.

Napomena za nastavnika

Tokom celoga teksta su upotrebljene tehnike prirodne dedukcije a aksiomatski razvoj bilo kojeg računa nije nijednom pomenut, mada su reference date u bibliografiji. Način na koji su predstavljeni dokazi najviše duguje Suppesu /24/[1], kojega u ovom smislu sledi i Mates /14/. Način navođenja asumpcija pomoću brojeva sa leve strane svakog reda dokaza čini mi se daleko jasnijim od tradicionalnih pristupa. Pravila iskaznog računa potiču suštinski od Gentzena. Njihova velika zasluga sastoji se u tome što se na osnovu njih mogu dobiti gotovo svi standardni

1 Kose zagrade koje su date kako ovde tako i tokom celog teksta predstavljaju naslove date u bibliografiji.

rezultati u ne više od petnaest koraka, što bi takođe trebalo očekivati da će poći za rukom i filozofski pronicljivijim studentima. Ona su stoga podređena uspešnom izvođenju vežbi, ali takođe omogućuju i studentu da se kreće u granicama jasno određenog skupa pravila. Stručnjak će zapaziti da, ako se izostavi jedna polovina pravila dvostruke negacije ('iz ¬¬A izvesti A'), skup koji odatle proishodi određuje Johansonov minimalni račun, a ako se tom skupu doda pravilo 'iz kontradikcije izvesti bilo šta', skup koji proishodi odatle određuje intuicionistički iskazni račun. Dobar student obično se zainteresuje za ove činjenice onda kada mu se predoči neplauzibilnost zakona isključenja trećeg.

Pravila predikatskog računa takođe potiču od Gentzena i mogu se pronaći kod Fitcha /4/; ona se takođe iznova pojavljuju u nedavno objavljenoj Matesovoj knjizi /14/. Ona imaju to svojstvo da, ako se dodaju širem skupu ovde već spomenutih pravila, daju u pravoj meri njima odgovarajući predikatski račun. Svojstvo našeg pristupa koje treba spomenuti tiče se toga da ulogu koju obično igraju slobodne varijable ovde igra simbol različitog stila, koji nazivamo proizvoljno ime (arbitrary name). Zbog toga pravila formiranja postaju složenija nego što je to uobičajeno; ali se time barem gube takve neobičnosti poput 'prazni kvantifikatori', a to dokazuje mogućnost utvrđivanja pravila za kvantifikatore u obliku koji ima manje odbojna ograničenja. Ovo svojstvo nije novo: ono seže barem do Hilberta i Bernaysa, upotrebio ga je i Hintikka, a u izmenjenom obliku pojavljuje se i kod Matesa /14/. Moje iskustvo je da ono studentima zadaje manje muke nego što to čini neka primerenija notacija[2].

Student pronicljivijeg duha počeće da sumnja u paradokse materijalne implikacije. Ova činjenica govori strogo protiv toga da bavljenje iskaznim računom započinje metodom istinosne tablice. U skladu sa tim, u Poglavlju 1 sam pokušao da privolim studenta na to da prihvati skup pravila, tako da paradoksi kao prirodna posledica proističu tek u Poglavlju 2; metod istinosne tablice je tada opravdan pozivanjem na ova pravila. Prema tome, profesor koji misli da paradoksi predstavljaju stvarne probleme, s pravom će naći da moja taktika nije sasvim poštena.

---

2 Trebalo bi da dodam i to da fusnota 460 kod Churcha /2/ predstavlja kritiku ove ideje; ali slučaj ništa ne kaže protiv njene pedagoške privlačnosti.

Interne reference

Rezultati iskaznog računa, onim redosledom kojim se pojavljuju u Poglavlju 1 i 2, obeleženi su brojevima 1-55. Rezultati predikatskog računa, onim redosledom kojim se pojavljuju (Poglavlje 3 i 4), obeleženi su brojevima 100-165. Izvesni rezultati koji se tiču teorije klasa obeleženi su brojevima 200-231 (Dodatak B). Tamo gde su takvi rezultati posredno upotrebljeni ili se na njih ukazuje, spomenuo sam ih navođenjem njihovog broja. Takođe su povremeno spomenuti i rezultati iz vežbi; tako '2.4.1(c)' ukazuje na Vežbu 1(c) Poglavlja 2, Odeljak 4. Brojevi u zagradama ukazuju ili na red u dokazu, ili na rečenicu ili formulu koja je tako obeležena brojem pre toga u istom odeljku; a sam kontekst će uvek određivati o kojem je odeljku reč.

* * *

Svoju zahvalnost dugujem Ocu Ivo Thomasu, O.P., koji je čitao Poglavlje 1 i profesoru Jamesu Thomasonu, koji je čitao celu knjigu, za vrlo korisne komentare kao i ispravke mnogih grešaka. Ostajem veliki dužnik svojoj supruzi i gospođi Susan Liddiard za pomoć pri kucanju, kao i g. Bruceu Marchallu za pomoć kod čitanja i indeksiranja dokaza. Mnogo dugujem raspravama sa kolegama oko najboljeg načina da se formulišu logička pravila: a posebno, profesoru Patricku Suppesu i Michaelu Dummettu, čija je ideja bila (1957) da treba da napišem ovu knjigu. Ali najveću zahvalnost dugujem mnogim studentima, u Oxfordu, Texasu i drugde, koji su me svojim pitanjima i prigovorima prisilili da pišem jasnije o stvarima o kojima je reč. Mnogi nedostaci koji su preostali u izlaganju su, naravno, moji.

Želeo bih da ovu knjigu posvetim Arthuru Prioru, bez čijeg ohrabrenja i entuzijazma nikada ne bih zašao u logiku, kao i sećanju na mog oca koji će, verujem, uživati u njoj.

E. J. L.

Claremont, California
Mart, 1965.

POGLAVLJE 1

ISKAZNI RAČUN I

1 Priroda logike

Nije lako, a možda nije čak ni korisno, objasniti ukratko šta je to logika. Kao i vecina predmeta, ona obuhvata mnoge različite vrste problema i nema jasno utvrđene granice; jednim krajem ona zadire u matematiku, drugim u filozofiju. Najbolji način da se otkrije šta je to logika jeste da se sa njom uhvati u koštac. Bezmalo, tek nekoliko opštih ocena o ovom predmetu može biti od pomoći da se pruži osnova za dalji tok ove knjige.

Logika se uglavnom bavi osnovanošću i neosnovanošću argumenata (with the soundness and unsoundness of arguments) i pokušava da sačini što je moguće preciznije uslove pod kojima je neki argument - bez obzira na oblast izučavanja - prihvatljiv. Ovaj stav iziskuje izvesno pojašnjenje: prvo, neophodno je da kažemo šta je to argument; drugo, šta shvatamo pod osnovanošću; treće, kako možemo preciznije sačiniti uslove za osnovanu argumentaciju; i četvrto, kako ovi uslovi mogu biti nezavisni od oblasti unutar koje je argumentacija derivirana. Nastavimo onda dalje polazeći od ovih tema.

Dosledno govoreći, argument se sastoji od izvesnih stavova ili iskaza, nazvanih njegovim *premisama*, kao i odredjenog drugačijeg stava ili iskaza, koji se naziva *konkluzija*, a za koji se kaže da iz ovih prethodnih *sledi*. Tvrdnju da konkluzija sledi iz premisa označavamo tako što između premisa i konkluzija upotrebljavamo takve reči kao što su ´odatle sledi´ i ´prema tome´. Umesto da kažu da konkluzije slede ili ne slede iz premisa, logičari ponekad kažu da premise *povlače* ili ne povlače konkluzije. Kada neko ozbiljno upotrebi argument (a da ga, na

primer, nije naveo tek kao ilustraciju), ta osoba tvrdi da su premise istinite i takođe tvrdi da je konkluzija istinita *s obzirom na* premise.

Logičari se bave time da li konkluzija sledi ili ne sledi iz datih premisa. Ako sledi, tada je argument o kojem se radi *osnovan*; u suprotnom slučaju, on je *neosnovan*. Obično se umesto 'osnovan' i 'neosnovan' koriste termini 'validan' i 'invalidan'. Pitanje osnovanosti i neosnovanosti argumenata mora se pažljivo razlikovati od pitanja o istinitosti i lažnosti stavova, bilo premisa ili konkluzija, u argumentu. Na primer, istinita konkluzija može osnovano biti izvedena iz lažnih premisa, ili mešavine istinitih i lažnih premisa; tako u argumentu:

(1) Napoleon je bio Nemac; svi Nemci su Evropljani; prema tome, Napoleon je bio Evropljanin,

nalazimo istinitu konkluziju osnovano izvedenu iz premisa od kojih je prva lažna a druga istinita. Isto tako, lažna konkluzija može biti osnovano izvedena iz lažnih premisa; tako u argumentu

(2) Napoleon je bio Nemac; svi Nemci su Azijati; prema tome, Napoleon je bio Azijat,

lažna konkluzija je osnovano izvedena iz dve lažne premise. S druge strane, argument nije nužno osnovan samo zato što su premise i konkluzija istiniti; tako u argumentu

(3) Napoleon je bio Francuz; svi Francuzi su Evropljani; prema tome, Hitler je Austrijanac,

svi stavovi su istiniti, ali niko ne bi mogao reći da je ovde konkluzija sledila iz premisa.

Temeljna veza između osnovanosti i neosnovanosti argumenta i istinitosti i lažnosti stavova od kojih je on sazdan, jeste sledeća: argument ne može biti osnovan ako su *sve* njegove premise istinite, a njegova konkluzija lažna. Nužan uslov osnovanog rasuđivanja jeste taj da istine slede samo iz istine. Ovaj uslov svakako da nije dovoljan za osnovanost, kao što vidimo iz (3), gde imamo istinite premise i istinita konkluzija, mada ne i osnovan argument. Ali da bi neki argument bio osnovan, onda *barem* mora biti zastupljen slučaj da, ako su sve premise istinite, tada je to i konkluzija. Zbog toga je logičar prevashodnije zainteresovan za uslove osnovanosti nego za stvarnu istinu ili laž

premisa i konkluzije; ali on može posredno biti zainteresovan za istinu radi same veze između njih i osnovanosti.

Koje tehnike logičar koristi da bi sačinio precizne uslove za osnovanu argumentaciju? Glavni deo ove knjige usredsređen je na detaljniji odgovor na ovo pitanje; ali u ovom trenutku možemo reći da je njegova najkorisnija zamisao usvajanje posebnog simbolizma, logičke notacije, za čiju upotrebu će biti data potpuna pravila. Zbog tog svojstva ovaj se predmet ponekad naziva *simbolička logika*. (Ponekad se takođe naziva i *matematička* logika, delimično zbog toga što je ovde postignuta strogost slična onoj koja pripada i matematici, a delimično i zato što su savremeni logičari posebno bili zainteresovani za argumente izvedene u oblasti matematike). Da bismo razumeli značaj simbolizma u logici, trebalo bi da se podsetimo analognog značaja posebnih matematičkih simbola.

Razmotri sledeću elementarnu algebarsku jednačinu:

(4) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$,

i zamisli koliko bi bilo teško izraziti ovaj stav u običnom jeziku, bez upotrebe varijabli '*x*','*y*', zagrada i znaka - i +. Najviše što možda možemo u tome postići bilo bi:

(5) Rezultat oduzimanja kvadrata jednog broja od kvadrata drugog daje isti broj kao onaj koji je dobijen sabiranjem dva broja, oduzimanjem prvog od drugog, a zatim pomnoženih rezultata ove dve operacije.

Upoređujući (4) sa (5) uviđamo da (4) ima, kao izraz za isti stav, barem tri prednosti nad (5). On je kraći. Jasniji je - barem onda kada se shvate matematički simboli. On je i tačniji. Iste prednosti kratkoća, jasnoća i tačnost - u logici su postignute pomoću upotrebe posebnih logičkih simbola.

Jednačina (4) istinita je za *bilo koji* par brojeva *x* i *y*. Stoga, ako smo izabrali da x bude 15 a da y bude 7, kao posledicu (4) imamo:

(6) $15^2 - 7^2 = (15 + 7)(15 - 7)$

Ako sada uporedimo (6) sa (4), možemo videti da je (6) dobijeno iz (4) naprosto stavljanjem '15' namesto '*x*' i '7' namesto '*y*'. Na ovaj način možemo proveriti da li (6) zaista sledi iz (4),

naprosto tako što ćemo na prvi pogled moći da vidimo da li smo ispravno izvršili substituciju varijabli. Ali da je (6) bilo izraženo običnim jezikom, kao što je to (4) bilo u (5), bilo bi daleko teže videti da li je ono osnovano zaključeno iz (5). Matematički simboli čine daleko lakšim i obrazovanje i proveravanje matematičkih računa. Slično tome, logički simboli su neposredno neophodni ako nastojimo ne samo da tačno argumentišemo već i da dosledno proveravamo osnovanost argumenata.

Ako se u nastavku bude činilo iscrpljujućim to što treba naučiti posebno notaciju za bavljenje logikom, čitalac bi trebalo da se podseti da je tek onda ovladao argumentacijom koja mu je neophodna za računanje kada je naučio da ispravno upotrebljava ´+´, ´-´, i tako dalje. Ova zamisao, koju je logika preuzela iz matematike, najmoćnije je orude logičara za ispitivanje osnovanosti ili neosnovanosti argumenata.

Naše krajnje pitanje u ovome odeljku jeste kako to da uslovi za validni argument mogu biti ispitani nezavisno od onih oblasti iz kojih su argumenti izvedeni: kada ovo ne bi moglo biti učinjeno, tada ne bi postojalo ni posebno učenje zvano logika. Za trenutak će jednostavan primer biti dovoljan. Ako uporedujemo dva argumenta

(7) Cvrčko je crvendać; nijedan crvendać nije selica; prema tome, Cvrčko nije selica,

i

(8) Kiseonik je element; nijedan element nije molekul; prema tome, kiseonik nije molekul,

od kojih su oba osnovana (jedan je izveden iz ornitologije, drugi iz hemije), teško je oteti se utisku da oni ipak imaju nešto zajedničko. To nešto logičari su nazvali njihovom *logičkom formom*, o kojoj bi trebalo nešto više da kažemo kasnije. Za trenutak pokušajmo da delimično proanalizujemo ovu zajedničku formu. Prva premisa i u (7) i u (8) tvrdi da izvesna pojedinačna stvar, nazovimo je *m* (Cvrčko u (7), kiseonik u (8)) ima izvesno svojstvo, nazovimo ga F (biti crvendać u (7), biti element u (8)). Druga premisa u (7) i (8) tvrdi da ništa sa ovim svojstvom F nema neko odredeno drugo svojstvo, nazovimo ga G (biti selica u (7), biti molekul u (8)). A konkluzija u (7) i (8) tvrdi, prema tome, da objekat *m* nema svojstvo G. Zajednički obrazac za (7) i (8) možemo utvrditi na sledeći način:

(9) *m* ima F; ništa sa F nema G; prema tome, *m* nema G.

Kada se jednom izvede opšta logička forma kao što je to u (9), njeno novo svojstvo izlazi na videlo. *Koji god* objekat da *m* označava, za *koje god* da su svojstvo F i G izabrani, obrazac (9) će biti validan: (9), kakvo je ovde dato, jeste obrazac validnog argumenta. Na primer, uzmimo neka *m* bude Jenkins, veliko F i veliko G neka budu odgovarajuća svojstva biti momak i biti oženjen: (9) tada postaje

(10) Jenkins je momak; nijedan momak nije oženjen, prema tome Jenkins nije oženjen,

što je, kao i (7) i (8), osnovan argument. (9) ipak nije povezano ni sa jednim pojedinačnim sadržajem, bilo da je to ornitologija, hemija, ili pravo; *posebna* terminologija - 'selica', 'molekul', 'momak' - iščezava utapajuci se u shematska slova 'F', 'G', '*m*'.

Forma tako može biti ispitana nezavisno od sadržaja, a argumenti su uglavnom validni ili invalidni pre s obzirom na to kakvu imaju formu nego s obzirom na njihov sadržaj. Zbog toga su forme argumenta, više nego sami argumenti, - ono što logika istražuje.

Da bismo objedinili sadržaje ovog odeljka mogli bismo logiku odrediti kao izučavanje, putem simboličkih sredstava, o egzaktnim uslovima pod kojima su obrasci argumenta validni ili invalidni; uvideće se da validnost i invalidnost treba pažljivo razlikovati od srodnih pojmova istine i laži. Ovo stanovište treba razumeti kao privremeno, s obzirom na to da će biti bolje shvaćeno u svetlu onoga što sledi.

2 Kondicionali i negacija

Kada analizujemo logičku formu argumenta (kao što smo to učinili u poslednjem odeljku da bismo (9) dobili iz (7) i (8)), gube se reči koje se povezane sa posebnim sadržajima, dok ostale reči preostaju; logičara prevashodno zanimaju reči koje obrazuju ovaj preostali rečnik, zato što je stožer validnosti zasnovan na njihovim svojstvima. Od posebnog značaja u ovom rečniku su reči 'ako... onda', '...i...', 'ili...ili...', i 'ne'. Zapravo, ovo i sledeće poglavlje posvećeni su sistematskom ispitivanju egzaktnih pravila za njihovo vlastito razvijanje u argumentaciji. U običnom jeziku nemamo jedinstven gramatički termin za ove

reči, ali se u logici one mogu nazvati *operatorima koji učestvuju u formiranju rečenica* (sentence-forming operators on sentences). Pokušaću da objasnim čime su zaslužile ovaj rogobatni naziv.

U argumentu, kao što smo već videli, događaju se iskazi; možemo da razlikujemo premise i konkluzija. Iskazi su, u prirodnim jezicima, izraženi *rečenicama*. Međutim, ne izražavaju sve rečenice iskaze; neke su upotrebljene da bi se postavila pitanja (takva kao 'Gde je Jack?'), druge da bi se izdale zapovesti (kao što je 'Otvori vrata'). Tamo gde je poželjno razlikovati rečenice koje izražavaju iskaze od ostalih vrsta rečenica logičari ove prve ponekad zovu *deklarativnim* rečenicama. Kada govorim o rečenicama, uvek imam na umu deklarativne rečenice, osim ako to nije eksplicitno poreknuto. Ako sada izaberemo dve rečenice maternjeg jezika, recimo 'pada kiša' i 'pada sneg', tada na odgovarajuće mesto možemo postaviti 'ako...onda...', '...i...', 'ili..., ili...' da bismo dobili novu rečenicu maternjeg jezika '*ako* pada kiša *onda* pada sneg', 'pada kiša *i* pada sneg' i '*ili* pada kiša *ili* pada sneg'. Dve prvobitne rečenice treba samo da zamene prazna mesta u 'ako...onda...', '...i...', i 'ili..., ili...'. Dalje, ako izaberemo jednu rečenicu maternjeg jezika, recimo 'pada kiša', tada na odgovarajuće mesto možemo staviti 'ne' da bismo dobili novu rečenicu maternjeg jezika: '*ne* pada kiša'. Odatle sledi da se, gramatički govoreći, uticaj ovih reči sastoji u tome što se formiraju nove rečenice iz (jedne ili dve) date rečenice. Zato ih nazivam operatorima koji učestvuju u formiranju rečenica. Pored ovih, primeri su još i: 'mada..., ipak...' (da bi bila upotpunjena, nedostaju joj dve rečenice), 'zato što...,...' (i ovde nedostaju dve), 'rečeno je da...' (ovde nedostaje samo jedna).

(Ova knjiga pisana je na engleskom i iz tog razloga se u originalnom tekstu pominju *engleske* rečenice i reči[1], ali gornje stanovište moglo bi se uz odgovarajući prevod primeniti na sve jezike koje znam. U logici nema ničega što je toliko uskogrudo da bi protivrečilo ovoj pojavi.)

U ovom poglavlju bavimo se pravilima rukovanja sa 'ako...,

1 Namesto 'engleskog' jezika, rečenica i reči, kako to stoji u originalnom tekstu, ovde smo se poslužili terminom 'maternji' jezik, odnosno, rečenice i reči maternjeg jezika - prim. prev.

onda...' i 'ne', i počinjemo uvođenjem posebnih logičkih simbola za ove operatore. Pretpostavimo da su P i Q bilo koja dva iskaza; tada ćemo iskaz da ako P *onda* Q pisati kao:

P -> Q.

Isto tako, neka P bude bilo koji iskaz; tada ćemo iskaz da *nije* slučaj da P pisati kao:

¬P.

Iskaz P -> Q zvaćemo *kondicionalni* iskaz, ili jednostavno *kondicional*, sa iskazom P kao njegovim *antecedentom* i iskazom Q kao njegovim *konsekventom*. Na primer, antecedent iskaza da ako pada kiša onda pada sneg jeste iskaz pada kiša, a njegov konsekvent je iskaz pada sneg. Stav ¬P biće nazvan negacija P-a. Na primer, iskaz da ne pada sneg jeste negacija iskaza da pada sneg.

Slova 'P' i 'Q', koja su ovde upotrebljena, trebalo bi uporediti sa varijablama '*x*', '*y*' iz algebre; ona se mogu shvatiti kao vrsta varijable i logičari ih često nazivaju *iskazne varijable*. Kod uvođenja znaka za minus '-' mogao bih reći sledeće: neka *x* i *y* budu bilo koja dva broja; tada ću rezultat oduzimanja *y* od *x* napisati *x* - *y*. Na analogan način uveo sam gornji znak '->', koristeći iskazne varijable umesto numeričkih varijabli, zbog toga što se u logici bavimo iskazima a ne brojevima.

Iskazne varijable takođe će nam pomoći da izrazimo logičku formu složenih iskaza (uporedi upotrebu shematskih slova 'F' i 'G' u (9) iz Odeljka 1). Razmotri, na primer, složeni iskaz

(1) Ako pada kiša, tada nije slučaj da ako ne pada sneg, ne pada kiša.

Uzmimo sada 'P' za iskaz da pada kiša i 'Q' za iskaz da pada sneg. Tada uz pomoć '->' i '¬' možemo simbolički zapisati (1) kao:

(2) P -> ¬(¬Q -> ¬P)

(zagrade ovde uvodimo na dovoljno očigledan način). (2), kao neka vrsta skraćenice za (1), sa prednostima kao što su kratkoća i jasnoća - barem onda kada je već jednom prevaziđeno osećanje odbojnosti prema novom simbolizmu - uspeva da izrazi logičku formu (1). Možemo videti kako (2) takođe daje logičku formu sasvim različitog iskaza

(3) Ako ima vatre, tada nije slučaj da ako nema dima, nema ni vatre:

ovde P stoji za iskaz da ima vatre, a Q za iskaz da ima dima.

Kada argumentujemo, mi deriviramo, ili *dedukujemo*, ili *deriviramo* konkluziju iz datih premisa; u logici formulišemo pravila, nazvana *pravila derivacije* (pravila izvođenja, rules of derivation) čija je svrha da kontrolišu aktivnost dedukovanja kako bi se obezbedilo da dobijena konkluzija bude postignuta na validan način. Sledeća odlika uobičajene argumentacije jeste ta da se ona postiže *postupno*: konkluzija iz nekog koraka koristi se kao premisa za novi korak; i tako sve dotle dok se ne postigne konačna konkluzija. Zbog toga će biti od pomoći ako odmah napravimo razliku između *asumpcija* i *premisa*. Pod *asumpcijom* razumećemo iskaz koji je, unutar datog raspona argumentacije, konkluzija koja se ne sastoji ni od jednog koraka rasuđivanja i koju pre svega uzimamo kao utvrđenu na samom početku celokupnog argumenta. Pod *premisom* ćemo shvatati iskaz koji je upotrebljen, na nekom pojedinačnom koraku celokupnog argumenta, da bi se postigla izvesna konkluzija. Asumpcija može biti - što najčešće i jeste slučaj - *upotrebljena* kao premisa čija je svrha da se na datom stupnju argumenta postigne izvesna konkluzija. Tada sama ta konkluzija može biti upotrebljena kao premisa za dalji korak u argumentu, i tako dalje. Zbog toga će na izvesnom stupnju premisa biti *ili* neka asumpcija argumenta u celini, *ili* konkluzija ranije faze u argumentu. Na bilo kojem datom stupnju celokupnog argumenta imaćemo konkluziju koja je bezuslovno postignuta iz izvesne asumpcije ili kombinacije asumpcija, pa ćemo zato reći da ova konkluzija *počiva na* ili *zavisi od* te asumpcije (tih asumpcija).

Grubo rečeno, naš će postupak u iznošenju argumenta biti sledeći. Svaki će korak biti označen novim redom, a svaki će red dosledno biti obeležen brojem. U svakom redu pojaviće se *ili* neka asumpcija argumenta u celini, *ili* konkluzija izvedena iz iskaza dobijenog u nekom od ranijih redova, a koji je zasnovan na tim iskazima kao premisama. Sa desne strane svakog iskaza biće navedeno pravilo derivacije koje je upotrebljeno da bi se opravdalo njegovo pojavljivanje na tom stupnju, kao i (tamo gde je to neophodno) brojevi upotrebljenih premisa. Sa leve strane svakog iskaza pojaviće se brojevi prv[illegible] asumpcija na kojima, na datom stupnju, taj argument p[illegible]iva.

Pravilo za asumpcije (A)

Prvo pravilo koje će biti uvedeno jeste *pravilo za asumpcije*, koie nazivamo A. Ovo pravilo nam omogućuje da na *bilo kojem* stupnju uvedemo *bilo koji* iskaz koji izaberemo kao asumpciju argumenta. Taj iskaz zapisujemo jednostavno kao novi red, sa njegove desne strane pišemo 'A', dok sa njegove leve strane stavljamo njemu svojstveni broj da bismo pokazali da se on zasniva na sebi samom kao asumpciji. Na taj način možemo započeti argument

1 (1) P -> Q A

Ovo znači da je u našem prvom koraku bio pretpostavljen iskaz P -> Q uz pomoć pravila o asumpcijama. Ili, nakon devet redova argumenta, možemo nastaviti

10 (10) ¬Q A

Ovo znači da smo u desetom redu pretpostavili iskaz ¬Q pomoću pravila o asumpcijama.

Može se činiti nepouzdano proizvoljnim to što pravilo o asumpcijama ne zahteva nikakva ograničenja koja se tiču vrste asumpcija koje možemo praviti (posebno to što se ne postavlja pitanje utvrđivanja toga da li su asumpcije koje su načinjene istinite). Ovo će najbolje biti shvaćeno ako se podsetimo da se logičar bavi pre osnovanošću argumenta nego istinom ili laži bilo koje od načinjenih asumpcija; zato nam A dozvoljava da načinimo asumpciju koju god hoćemo - posao je logičara da bude siguran da koja god konkluzija da je na njoj zasnovana - bude zasnovana validno, a *ne* da istražuje njihovu verodostojnost.

Modus ponendo ponens (MPP)

Drugo pravilo derivacije tiče se operatora ->. Nazivamo ga *modus ponendo ponens*, u skraćenom obliku MPP, što je srednjovekovni termin za srodno načelo rasuđivanja. Kada su kao premise dati kondicional i antecedent tog kondicionala MPP nam omogućuje da izvedemo konsekvent tog kondicionala kao konkluziju. Na primer, ako je dato P -> Q i P, možemo dedukovati Q. Ili, da uzmemo složeniji primer, kada je dato ¬Q -> (¬P -> Q) i ¬Q, možemo dedukovati ¬P -> Q. Kada to

formalno zabeležimo, ova dva argumenta postaju:

1	1	(1)	P –> Q	A
	2	(2)	P	A
	1,2	(3)	Q	1,2 MPP

2	1	(1)	¬Q –> (¬P –> Q)	A
	2	(2)	¬Q	A
	1,2	(3)	¬P –> Q	1,2 MPP

U prva dva reda oba ova argumenta načinili smo neophodne asumpcije pomoću pravila A, nabrajajući ih zbog toga sa leve strane. U redu (3) izveli smo odgovarajuću konkluziju pomoću MPP: a to je *konsekvent* kondicionala u redu (1), pošto je u redu (2) dat *antecedent* istog kondicionala. Sa desne strane u redu (3) kod oba slučaja zabeležili smo upotrebljeno pravilo (MPP) zajedno sa brojevima premisa koje su ovde upotrebljene u primeni ovoga pravila. Sa leve strane u redu (3) obeležili smo asumpcije na kojima počiva konkluzija - u ovom slučaju su to opet (1) i (2), koji su ovde premise za primenu MPP, a u isto vreme i asumpcije celokupnog argumenta.

Sada pogledajmo složenije primere, u kojima su upotrebljena samo dva pravila A i MPP. Prvo ću pokazati da, kada su date asumpcije P –> Q, Q –> R i P, možemo validno zaključiti R.

3	1	(1)	P –> Q	A
	2	(2)	Q –> R	A
	3	(3)	P	A
	1,3	(4)	Q	1,3 MPP
	1,2,3	(5)	R	2,4 MPP

Ovde prva tri reda čine tek neophodne asumpcije. U redu (4) pomoću MPP izvodimo konkluziju Q, pošto je u redu (1) dat kondicional P –> Q, a u redu (3) njegov antecedent P. Zbog toga su (1) i (3) pomenuti sa desne strane kao premise za primenu pravila, a sa leve kao asumpcije koje su upotrebljene na ovom koraku. U redu (5) koristimo Q, konkluziju iz reda (4), kao premisu za novu primenu MPP, beležeći da je Q antecedent kondicionala Q –> R koji je pretpostavljen u redu (2). Tako dobijamo željenu konkluziju R iz (2) i (4) kao premisa. Brojevi 2 i 4 pojavljuju se usled toga sa desne strane. U odlučivanju koje asumpcije navesti sa leve strane, napominjemo da (4) počiva na

(1) i (3), dok (2) počiva jedino na samom sebi: ove asumpcije stavljamo kao 'ulog' da bismo dobili (1), (2) i (3).

Drugo, pokazaću da ako je dato P -> (Q -> R), P -> Q i P, možemo validno zaključiti R.

4	1	(1)	P -> (Q -> R)	A
	2	(2)	P -> Q	A
	3	(3)	P	A
	1,3	(4)	Q -> R	1,3 MPP
	2,3	(5)	Q	2,3 MPP
	1,2,3	(6)	R	4,5 MPP

U redovima (4) i (5) premise koje su upotrebljene za primenu MPP takođe su asumpcije, tako da se isti par brojeva pojavljuje i sa desne i sa leve strane. Ali u redu (6) premise su kondicional (4), Q -> R, kao i njegov antecedent (5), Q, od kojih nijedna nije asumpcija celokupnog argumenta: prema tome, u određivanju brojeva sa leve strane mi 'ulažemo' asumpcije na kojima počivaju (4) i (5) - (1), (3), odnosno (2), (3) - da bismo dobili (1), (2) i (3).

Trebalo bi biti očigledno da je MPP pouzdano načelo rasuđivanja. Ono nas barem nikada neće zavesti od istinitih premisa ka lažnoj konkluziji. Razlog za to jeste taj što je osnovno svojstvo naše upotrebe 'ako...onda...' u tome što ako je kondicional istinit i ako je isto tako istinit i njegov antecedent tada mora biti takođe istinit i njegov konsekvent, a MPP nam dosledno omogućuje da kao konkluziju tvrdimo konsekvent kondicionala onda kada su kao premise dati sam kondicional i njegov antecedent.

Od pomoći će biti ako posedujemo skraćenicu za glomazan izraz 'kada su kao asumpcije date..., validno možemo zaključiti...'. Sa tom svrhom, uvodim simbol

$$\vdash,$$

u logičkoj literaturi često nazvan, mada pogrešno, *znakom tvrđenja*. Možemo se dogovoriti da ga čitamo kao 'prema tome'. Ispred njega navodimo (bez obzira na redosled) naše asumpcije, a nakon njega pišemo izvedenu konkluziju. Koristeći ovakav način beleženja, prema ovome dogovoru možemo objediniti kao celinu četiri primera dosadašnjeg rasuđivanja (koje ćemo od

sada zvati *dokazi*) na sledeći način:

1 P -> Q, P ⊢ Q;
2 ¬Q -> (¬P -> Q), ¬Q ⊢ ¬P -> Q;
3 P -> Q, Q -> R, P ⊢ R;
4 P -> (Q -> R), P -> Q, P ⊢ R.

Rezultate dobijene u ovom obliku nazivaćemo *sekventi*. Sekvent je onda argument-mreža koja sadrži skup asumpcija i konkluziju za koju se tvrdi da iz njih sledi. Ukratko rečeno, sekventi koje možemo da dokažemo obuhvataju validne obrasce u tom smislu da ako uzmemo P, Q, R, ..., kao stvarne iskaze dokazanog sekventa tada čitajući '⊢' kao 'prema tome' dobijamo validan argument. Iskazi sa leve strane od '⊢' postaju asumpcije argumenta, a iskaz sa njegove desne strane postaje validno izvedena konkluzija iz ovih asumpcija. Sa ovog stanovišta, u izgrađivanju dokaza prikazujemo validnost obrasca argumenta, što predstavlja jedno od najvažnijih usredsređenja logičara.

Dokazani sekvent može biti zapisan neposredno na osnovu poslednjeg reda dokaza[2]. Umesto brojeva sa leve strane pišemo iskaze koji se pojavljuju u odgovarajućim redovima; tada stavljamo znak tvrđenja na kraju, kao konkluziju dodajemo sam iskaz iz poslednjeg reda. Da bismo ovo sagledali trebalo bi četiri gornja sekventa uporediti sa poslednjim redovima odgovarajućih dokaza.

Modus tollendo tollens (MTT)

Treće pravilo derivacije obuhvata -> i ¬. I ovde koristimo za njega srednjovekovni termin *modus tollendo tollens*, ili kraće MTT. Kada su kao premise dati kondicionalni iskaz i *negacija* njegovog konsekventa MTT nam dopušta da izvedemo kao konkluziju *negaciju* antecedenta kondicionala.

Ovde su data dva jednostavna primera upotrebe MTT. Prethodno sam naveo dokazani sekvent, nakon čega sledi sam dokaz.

---

2 Tako, kao dokaz uzimamo dokaz *sekventa*, ali isto je tako prirodno reći, u drugom smislu, da je *konkluzija* u dokazu dokazana *iz* izvesnih asumpcija. Ali dvosmislenost reči 'dokazati' koja odatle proizilazi je sasvim bezopasna.

5 P -> Q, ¬Q ⊢ ¬P

1	(1)	P -> Q	A
2	(2)	¬Q	A
1,2	(3)	¬P	1,2 MTT

6 P -> (Q -> R), P, ¬R ⊢ ¬Q

1	(1)	P -> (Q ->R)	A
2	(2)	P	A
3	(3)	¬R	A
1,2	(4)	Q -> R	1,2 MPP
1,2,3	(5)	¬Q	3,4 MTT

S obzirom na red (5), imamo u vidu da je (3), ¬R, negacija konsekventa kondicionala (4), Q -> R, tako da pomoću MTT možemo zaključiti negaciju ¬Q antecedenta (4): sa desne strane navodimo (3) i (4), a sa leve strane (1) i (2) - asumpcije na kojima počiva (4) - kao i (3) - asumpciju, na kojoj (3) počiva, naime nju samu.

Osnovanost pravila MTT možemo sagledati pomoću uobičajenih primera. Argumenti koji slede su očito osnovani:

(4) Ako je Napoleon bio Kinez, onda je bio Azijat; Napoleon nije bio Azijat, prema tome, on nije bio Kinez.

(5) Ako je Napoleon bio Francuz, onda je bio Evropljanin; Napoleon nije bio Evropljanin; prema tome, nije bio Francuz.

U oba ova slučaja, kada je dat kondicional i negacija njegovog konsekventa, dedukujemo validnost negacije njegovog antecedenta; u (4) je konkluzija tačna, a to su i obe premise; u (5) je konkluzija lažna, ali isto tako i jedna premisa. Trebalo bi da je jasno da ovaj obrazac rasudivanja nikada neće od premisa od kojih su sve *istinite* voditi ka konkluziji koja je *lažna*.

Dvostruka negacija (DN)

Četvrto pravilo derivacije sastoji se od samih negacija. Pod *dvostrukom negacijom* nekog iskaza P razumemo iskaz ¬¬P. Intuitivno gledano, tvrditi kako nije slučaj da nije slučaj da pada kiša jeste isto što i tvrditi da pada kiša, a to važi i za bilo koji iskaz: dvostruka negacija nekog iskaza ekvivalentna je samom tom iskazu. Zbog toga možemo iz dvostruke negacije

iskaza validno derivirati taj iskaz, kao i obratno. Ovo načelo obrazuje *pravilo dvostruke negacije* (DN): kada je kao premisa dat dvostruko negirani iskaz, DN nam dozvoljava da izvedemo sam taj iskaz kao konkluziju; a kada je neki iskaz dat kao premisa, DN nam dopušta da izvedemo kao konkluziju njegovu dvostruku negaciju. Za razliku od MPP i MTT, DN u svojoj primeni iziskuje samo jednu premisu, a ne dve. Primer njegove upotrebe prikazan je u sledećim dokazima.

7 P -> ¬Q, Q ⊢ ¬P

1	(1)	P -> ¬Q	A
2	(2)	Q	A
2	(3)	¬¬Q	2 DN
1,2	(4)	¬P	1,3 MTT

Treba posebno imati u vidu da, pošto je ¬Q konsekvent iz (1) P -> ¬Q, neophodno je da dobijemo njegovu *negaciju*, tj. ¬¬Q, pre nego što budemo u mogućnosti da primenimo pravilo MTT: zato nam je potreban korak DN od (2) do (3) pre nego što upotrebimo MTT u redu (4).

8 ¬P -> Q, ¬Q ⊢ P

1	(1)	¬P -> Q	A
2	(2)	¬Q	A
1,2	(3)	¬¬P	1,2 MTT
1,2	(4)	P	3 DN

Treba posebno imati u vidu da pomoću MTT iz (1) i (2) možemo izvesti kao konkluziju *negaciju* antecedenta iz (1), tj. ¬¬P: zbog toga nam je potreban korak DN iz (3) i (4) da bismo dobili konkluziju P. Takođe treba paziti na to da konkluzija iz primene DN počiva na sasvim istim asumpcijama kao njenim premisama.

Kondicionalni dokaz (CP)

Pravila MPP i MTT omogućuju nam da upotrebimo kondicionalnu *premisu*, zajedno ili sa njenim antecedentom ili sa negacijom njegnog konsekventa, sa svrhom da dobijemo izvesnu konkluziju koja je ili njen konsekvent ili negacija njenog antecedenta. Ali, kako možemo da dobijemo kondicional kao *konkluziju*? Najprirodnija zamisao jeste da uzmemo antecedent kondicionala koji želimo da dokažemo kao zasebnu asumpciju,

sa namerom da deriviramo njegov konsekvent kao konkluziju: ako nam to pođe za rukom, ovo možemo prihvatiti kao dokaz prvobitnog kondicionala iz prvobitnih asumpcija (ako ih ima). Na primer, uzmemo li da je dato da su svi Nemci Evropljani, na koji način bismo tada mogli da dokažemo da ako je Napoleon bio Nemac, onda je on bio Evropljanin. Naš je odgovor prirodan: pretpostavimo da je Napoleon bio Nemac (ovde uzimamo kao da je antecedent kondicionala dokazan, ali kao zasebna asumpcija); prema tome Napoleon je Evropljanin (ovde smo derivirali konsekvent kao konkluziju); pa otuda, ako je Napoleon bio Nemac, on je bio Evropljanin (ovde smo prethodne korake argumenta uzeli kao dokaz traženog kondicionala).

Peto pravilo derivacije, *pravilo kondicionalnog dokaza* (CP) (the rule of conditional proof), dosledno podražava ovaj prirodan postupak i ono je naša najopštija zamisao za postizanje kondicionalnih konkluzija. Njegovo delovanje je teže shvatiti nego što je to bilo u prethodnim slučajevima, ali neophodno je da ga prihvatimo takvim kakvo jeste. Prvo ću ga utvrditi, a zatim prikazati primerom i razmotriti.

Pretpostavimo da neki iskaz (nazovimo ga B) zavisi, kao od jedne od svojih asumpcija, od nekog iskaza (nazovimo ga A); CP nam tada omogućuje da deriviramo konkluziju A -> B na preostalim asumpcijama (ukoliko ih ima). Drugim rečima, na izvesnom stupnju dokaza imamo deriviranu konkluziju B iz asumpcije A (i možda drugih asumpcija); tada nam CP dozvoljava da ovo uzmemo kao dokaz za A -> B na osnovu drugih asumpcija (ukoliko ih ima).

Na primer:

9 P -> Q ⊢ ¬Q -> ¬P

1	(1) P -> Q	A
2	(2) ¬Q	A
1,2	(3) ¬P	1,2 MTT
1	(4) ¬Q -> ¬P	2,3 CP

Pokušavajući da deriviramo kondicional ¬Q -> ¬P iz P -> Q, prvo pretpostavljamo njegov antecedent ¬Q u redu (2) i deriviramo njegov konsekvent ¬P u redu (3); CP u redu (4) nam omogućuje da ovo preuzimamo kao dokaz za ¬Q -> ¬P samo na osnovu asumpcije (1). Sa desne strane, dali smo prvo broj pretpostavljenog antecedenta, dok je drugi broj - broj zaključenog konsekventa. Sa leve strane, asumpcija (2) u redu (3) se gubi u

antecedentu novog kondicionala i preostaje nam samo (1). U primeni CP broj asumpcija se na ovaj način uvek umanjuje za po jednu, dok ovu koja je izostavljena nazivamo *otpuštena asumpcija* (the discharged assumption).

10 P -> (Q -> R) ⊢ Q -> (P -> R)

1	(1)	P -> (Q -> R)	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q -> R	1,3 MPP
1,2,3	(5)	R	2,4 MPP
1,2	(6)	P -> R	3,5 CP
1	(7)	Q -> (P -> R)	2,6 CP

Nešto složeniji primer koji zahteva dvostruku upotrebu CP: pri pokušaju da deriviramo kondicional Q -> (P -> R) iz P -> (Q -> R), prvo pretpostavljamo njegov antecedent Q u redu (2), sa svrhom da dobijemo njegov konsekvent P -> R; pošto je ovaj konsekvent takođe kondicional, pretpostavljamo sada njegov antecedent P u redu (3), sa ciljem da dobijemo njegov konsekvent R. Ovo je postignuto sa dva koraka MPP (redovi (4) i (5)); red (6) pomoću CP shvatamo kao dokaz za P -> R iz asumpcija (1) i (2), a sa desne strane navodimo red (3) (asumpcija antecedenta) i red (5) (derivacija konsekventa). Na isti način red (7) shvatamo kao dokaz za Q -> (P -> R) samo iz asumpcije (1), a sa desne strane navodimo red (2) (asumpcija antecedenta) i red (6) (derivacija konsekventa). Kao i ranije, asumpcije koje su na levoj strani umanjuju se za po jednu na svakom koraku CP.

11 Q -> R ⊢ (¬Q -> ¬P) -> (P -> R)

1	(1)	Q -> R	A
2	(2)	¬Q -> ¬P	A
3	(3)	P	A
3	(4)	¬¬P	3 DN
2,3	(5)	¬¬Q	2,4 MTT
2,3	(6)	Q	5 DN
1,2,3	(7)	R	1,6 MPP
1,2	(8)	P -> R	3,7 CP
1	(9)	(¬Q -> ¬P) -> (P -> R)	2,8 CP

Ovaj se dokaz služi sa svih pet pravila derivacije koja su do sada

uvedena, pa zato iziskuje da se na njega osvrnemo. Sa ciljem da dokažemo složeni kondicional, pretpostavljamo njegov antecedent ¬Q –> ¬P u redu (2) i pokušavamo da dokažemo njegov konsekvent P –> R. Pošto je ovo takodje kondicional, pretpostavljamo njegov antecedent P u redu (3), a nakon niza koraka u kojima koristimo DN, MTT i MPP, deriviramo njegov konsekvent R u redu (7). Dva koraka CP, koja su paralelna sa dva poslednja koraka dokaza 10, dovršavaju izradu dokaza tako što redom otpuštaju asumpcije (3) i (2).

Dokazi 10 i 11 pružaju koristan i značajan opšti metod za iznalaženje dokaza za sekvente sa složenim kondicionalom kao konkluzijom. Nakon upotrebe pravila za asumpcije A koje je dato u sekventu, pretpostavljamo takođe antecedent željene kondicionalne konkluzije i težimo tome da dokažemo njen konsekvent; ako je ovo isto tako kondicional, pretpostavljamo njegov antecedent i težimo tome da dokažemo njegov konsekvent; ovaj postupak ponavljamo sve dotle dok se pravac naše mete ne okrene ka kondicionalnom konkluzija. Ako ovo možemo derivirati iz asumpcija koje sada imamo, dosledan broj CP koraka, primljenih obratnim redosledom, dokazaće prvobitni sekvent.

Ovo poglavlje završavam osvrtom na dve uobičajene pogreške, toliko uvrežene da su dobile imena. U skladu sa MPP, ako je kondicional istinit a isto tako i njegov antecedent, tada osnovano možemo derivirati njegov konsekvent. Ako je kondicional istinit, a isto tako i njegov *konsekvent*, da li je osnovano derivirati njegov *antecedent*? Ono što sledi pokazaće da nije uvek osnovano učiniti tako nešto: istinito je da ako je Napoleon bio Nemac, onda je on bio Evropljanin, pošto su svi Nemci Evropljani; pa je istinito i da je Napoleon bio Evropljanin; ali je lažno, pa zato ne može biti osnovano dedukovano iz ovih istinitih premisa, da je Napoleon bio Nemac. Pretpostaviti da je osnovano derivirati antecedent kondicionala iz kondicionala i njegovog konsekventa znači učiniti *grešku afirmacije konsekventa* (the fallacy of affirming the consequent). Isto tako, u skladu sa pravilom MTT, ako je istinit kondicional, a takođe i negacija njegovog konsekventa, tada možemo osnovano derivirati negaciju njegovog antecedenta. Ali nije uvek osnovano derivirati negaciju *konsekventa* iz samog kondicionala i negacije njegovog *antecedenta*, a pretpostaviti da je to osnovano znači učiniti *grešku*

pobijanja antecedenta (the fallacy of denying the antecedent). Može se uzeti isti primer; ako je istinito da akó je Napoleon bio Nemac tada je on bio Evropljanin, pa je isto tako istinito i da *nije* bio Nemac, ali nije istinito da Napoleon nije bio Evropljanin.

Shematski izloženo: sekventi

1 P -> Q, P ⊢ Q i
5 P -> Q, ¬Q ⊢ ¬P

su osnovani obrasci rasudivanja, kao što smo to dokazali. Ali sekventi

6 P -> Q, Q ⊢ P i
7 P -> Q, ¬P ⊢ ¬Q

nisu osnovani obrasci, što smo pokazali pronašavši *primere* stavova P i Q takvih da su asumpcije iz (6) i (7) zapravo tačne, dok njihove konkluzije ispadaju lažne; zbog toga što je nužan uslov osnovanog obrasca argumenta takav da nas *nikada* neće voditi od asumpcija koje su istinite ka lažnoj konkluziji. (6) je zapravo obrazac greške tvrdenja konsekventa, a (7) greške pobijanja antecedenta.

V e ž b e

1 Nadi dokaze za sledeće sekvente koristeći pravila derivacije koja su do sada uvedena:

(a) P -> (P -> Q), P ⊢ Q
(b) Q -> (P -> R) ¬R, Q ⊢ ¬P
(c) P -> ¬¬Q, P ⊢ Q
(d) ¬¬Q -> P, ¬P ⊢ ¬Q
(e) ¬P -> ¬Q, Q ⊢ P
(f) P -> ¬Q ⊢ Q -> ¬P
(g) ¬P -> Q ⊢ ¬Q -> P
(h) ¬P -> ¬Q ⊢ Q -> P
(i) P -> Q, Q -> R ⊢ P -> R
(j) P -> (Q -> R) ⊢ (P -> Q) -> (P -> R)
(k) P -> (Q -> (R -> S)) ⊢ R -> (P -> (Q -> S))
(l) P -> Q ⊢ (Q -> R) -> (P -> R)
(m) P ⊢ (P -> Q) -> Q
(n) P ⊢ (¬(Q -> R) -> ¬P) -> (¬R -> ¬Q)

2 Pokaži da su sledeći sekventi neosnovani obrasci argumenta, tako što ćeš pronaći odgovarajuće prave stavove za P i Q takve da je asumpcija (ili asumpcije) istinita a konkluzija lažna:

(a) P -> ¬Q, ¬P ⊢ Q
(b) ¬P -> ¬Q, ¬Q ⊢ ¬P
(c) P -> Q ⊢ Q -> P

3 Konjunkcija i disjunkcija

Od četiri operatora koji učestvuju u formiranju rečenica, za koje je u poslednjem odeljku napomenuto da su od velikog značaja za logičara, do sada su razmatrana jedino dva: 'ako... onda...' i 'ne'. U ovom odeljku, uvodimo pravila za argumente koji sadrže '...i...' i 'ili...ili...'.

Neka P i Q budu bilo koja dva iskaza. Tada se iskaz da *i* P *i* Q naziva *konjunkcija* P i Q i piše se

P & Q.

P i Q se nazivaju *konjunkti* konjunkcije P & Q. Slično, stav da *ili* P *ili* Q naziva se *disjunkcija* P i Q i piše se

P v Q.

P i Q se nazivaju *disjunkti* disjunkcije P v Q. (Simbol 'v' dat je sa tom namerom da skrene pažnju poznavaocima klasičnih jezika na latinsko 'vel' koje stoji nasuprot 'aut': zato što je P v Q shvaćeno tako da ne isključuje mogućnost da može biti slučaj da i P i Q.)

Postoje dva pravila derivacije koja se tiču &, *pravilo uvođenja* & i *pravilo eliminacije* & (the rule of &-introduction and the rule of &-elimination); postoje i dva pravila koja se tiču v, *pravilo uvođenja* v i *pravilo eliminacije* v (the rule of v-introduction and the rule of v-elimination). Pravila uvođenja služe u tu svrhu da nam omogućuju da deriviramo *konkluzije* koje sadrže & ili v, dok nam pravila eliminacije služe u tu svrhu da nam omogućuju da koristimo *premise* koje sadrže & ili v. Sada ćemo razmotriti i ispitati ova pravila.

Uvođenje & (&I)

Pravilom uvođenja & (&I) izuzetno je lako vladati. Kada su data bilo koja dva iskaza kao premise, &I nam dozvoljava da deriviramo

njihovu konjunkciju kao konkluziju. Ovo je pravilo na očigledan način saobrazno osnovanom načelu rasudivanja; jer, ako su A i B posebno slučajevi, tada je očito da A & B mora biti slučaj.
Sledeći dokazi prikazuju upotrebu &I.

12 P, Q ⊢ P & Q

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1,2	(3)	P & Q	1,2 &I

U redu (3) pomoću &I zaključujemo konjunkciju asumpcija (1) i (2). Sa desne strane navodimo (1) i (2) kao premise u primeni &I; sa leve strane navodimo uložene asumpcije na kojima počivaju ove premise - što je i ovde slučaj.

13 (P & Q) -> R ⊢ P -> (Q -> R)

1	(1)	(P & Q) -> R	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2,3	(4)	P & Q	2,3 &I
1,2,3	(5)	R	1,4 MPP
1,2	(6)	Q -> R	3,5 CP
1	(7)	P -> (Q -> R)	2,6 CP

Pokušavajući da dokažemo kondicional P -> (Q -> R), pretpostavljamo, prvo njegov antecedent P (red (2)) i drugo, antecedent njegovog konsekventa Q (red (3)). Korak &I u redu (4) daje nam konjunkciju ovih asumpcija, omogućujući nam da primenimo MPP u redu (5), da bismo dobili R. Dva koraka CP čine dokaz potpunim.

Eliminacija & (&E)

Pravilo eliminacije & (&E) je sledeće. Kada je data bilo koja konjunkcija kao premisa, &E nam omogućuje da deriviramo bilo koji od konjunkata kao konkluziju. Takode, pravilo je evidentno osnovano; jer ako je A & B slučaj, očito je da posebno A i posebno B mora biti slučaj. Ovde su primeri.

14 P & Q ⊢ P

1	(1)	P & Q	A
1	(2)	P	1 &E

15 P & Q ⊢ Q

1	(1)	P & Q	A
1	(2)	Q	1 &E

16 P -> (Q -> R) ⊢ (P & Q) -> R

1	(1)	P -> (Q -> R)	A
2	(2)	P & Q	A
2	(3)	P	2 &E
2	(4)	Q	2 &E
1,2	(5)	Q -> R	1,3 MPP
1,2	(6)	R	4,5 MPP
1	(7)	(P & Q) -> R	2,6 CP

Želimo kondicionalnu konkluziju (P & Q) -> R, pa zato pretpostavljamo njen antecedent u redu (2) da bismo došli do R. &E je upotrebljeno u redovima (3) i (4) da bi se dobili zasebno konjunkti P i Q koji su nam neophodni za korake MPP u redovima (5) i (6). Sa desne strane, u primeni &E navodimo konjunkciju koja je upotrebljena kao premisa, a sa leve strane asumpciju na kojoj ta konjunkcija počiva.

Pravila &I i &E su najčešće upotrebljeni zajedno u okviru istog dokaza. Na primer:

17 P & Q ⊢ Q & P

1	(1)	P & Q	A
1	(2)	P	1 &E
1	(3)	Q	1 &E
1	(4)	Q & P	3,2 &I

18 Q -> R ⊢ (P & Q) -> (P & R)

1	(1)	Q -> R	A
2	(2)	P & Q	A
2	(3)	P	2 &E
2	(4)	Q	2 &E
1,2	(5)	R	1,4 MPP
1,2	(6)	P & R	3,5 &I
1	(7)	(P & Q) -> (P & R)	2,6 CP

Želimo kondicionalnu konkluziju (P & Q) -> (P & R) i zato pretpostavljamo antecedent P & Q i cilj nam je da dobijemo P & R. Ovaj je cilj preoblikovan u cilj za P i R posebno, odakle će na osnovu &I slediti P & R. P sledi iz P & Q pomoću &E, a

isto tako i Q, koje može biti upotrebljeno u konjunkciji sa redom (1) da bi se dobilo R pomoću MPP (red (5)). Kada je &I upotrebljeno u redu (6) premise su (3) i (5), a one počivaju na asumpciji (2), odnosno asumpcijama (1) i (2). Zato je njihov ulog - (1) i (2) - naveden sa leve strane.

Uvođenje v (vI)

Pravilo uvođenja v zovemo vI. Kada je dat bilo koji iskaz kao premisa vI nam dozvoljava da kao konkluziju deriviramo disjunkciju tog iskaza i *bilo kojeg* iskaza. Tako iz P kao premise možemo derivirati kao konkluziju P v Q, ili konkluziju Q v P; ni ovde nema nikakve razlike s obzirom na to šta je iskaz Q. Jasno je da će konkluzija uopšte kod primene vI biti mnogo širi od premise. Odnosno, može biti slučaj da ili P ili Q bude slučaj čak i ako nije slučaj da P. Bezmalo, pravilo je prihvatljivo u tom smislu da kada je P slučaj tada isto tako mora biti i slučaj da ili P ili Q. Na primer, slučaj da je Charles I bio pogubljen. Odatle sledi da je on bio ili pogubljen ili je bio poslat na električnu stolicu. Disjunkcija P v Q je istinita ako je *barem jedan* od njenih disjunkata istinit, tako da pravilo vI ne može navoditi istinite premise na lažnu konkluziju (mada može navesti na pomalo čudan).

Eliminacija v (vE)

Pravilo eliminacije v (vE) je nešto složenije. Prvo ću ga izložiti, zatim objasniti i opravdati i, konačno, prikazati ga zajedno sa vI. Neka A, B i C budu bilo koja tri iskaza, i pretpostavimo (a) da nam je dato da A v B, (b) da iz A kao asumpcije možemo da deriviramo C kao konkluziju, (c) da iz B kao asumpcije možemo da deriviramo C kao konkluziju; tada nam vE omogućuje da izvučemo C kao konkluziju bilo koje od asumpcija na kojima A v B počivaju, zajedno sa bilo kojom od asumpcija (nezavisno od samog A) na kojima C počiva u njegovoj derivaciji iz A i bilo kojom od asumpcija (nezavisno od samog B) na kojima C počiva u njegovoj derivaciji iz B. Zato je za korak vE tipična sledeća situacija: imamo kao premisu disjunkciju A v B i želimo da deriviramo izvesnu konkluziju C; cilj nam je prvo da deriviramo C iz prvog disjunkta A, a drugo, da deriviramo C iz drugog disjunkta B. Kada su ove faze argumenta upotpunjene, tada imamo situaciju koja je gore opisana u (a), (b) i (c) i možemo da

primenimo vE da bismo dobili konkluziju C neposredno iz A v B. Sa desne strane moramo nažalost da navedemo pet redova: (i) red gde se pojavljuje disjunkcija A v B; (ii) red u kojem je pretpostavljeno A; (iii) red u kojem je C derivirano iz A; (iv) red u kojem je pretpostavljeno B; (v) red u kojem je C derivirano iz B. Sa leve strane, konkluzija može počivati na složenijem ulogu asumpcija, deriviranih iz tri izvora: (i) na bilo kojima od asumpcija na kojoj počiva A v B; (ii) na bilo kojoj od asumpcija na kojima počiva C u njegovoj derivaciji iz A, mada ne na samom A, (iii) na bilo kojoj od asumpcija na kojima počiva C u njegovoj derivaciji iz B, ali ne na samom B.

Mada je ovde utvrđeno kao dosledno samostalno, pravilo vE odgovara krajnje prirodnom načelu rasudivanja. Pretpostavi da je slučaj da ili A ili B, tj. da samo *jedno* od A ili B jeste istinito; pretpostavi i to da na asumpciji A možemo pokazati da je C slučaj, tj. da ako A važi C važi; pretpostavi isto tako da na asumpciji B možemo isto tako pokazati da C važi; tj. da ako B važi, C takođe važi; tada C važi u oba slučaja. Na primer: slažete se sa tim da ili pada kiša ili je lepo vreme (A v B); kada je dato da pada kiša, tada nije zgodno ići u šetnju (iz A derivirali smo C); kada je dato da je lepo vreme, mora biti i da je jako toplo, tako da opet nije zgodno poci u šetnju (iz B smo derivirali C). Zato u oba slučaja nije zgodno poći u šetnju (zaključujemo C).

19 P v Q ⊢ Q v P

1	(1)	P v Q	A
2	(2)	P	A
2	(3)	Q v P	2 vI
4	(4)	Q	A
4	(5)	Q v P	4 vI
1	(6)	Q v P	1,2,3,4,5 vE

U redu (1) pretpostavili smo P v Q; pošto je ovo disjunkcija naš cilj je da deriviramo konkluziju Q v P iz prvog disjunkta P, pretpostavljenog u redu (2), i isto tako iz drugog disjunkta Q, pretpostavljenog u redu (4). Ovo je postignuto u redovima (3) i (5) pomoću koraka vI koji bi trebalo da su očigledni. U redu (6) direktno zaključujemo Q v P iz asumpcije (1), pošto ono sledi iz svake asumpcije zasebno. Sa desne strane, navodimo red (1) (-disjunkciju), red (2) (asumpciju prvog disjunkta), red (3) (derivacija konkluzije iz tog disjunkta), red (4) (asumpciju drugog

disjunkta) i red (5) (derivacija konkluzije iz tog disjunkta). Sa leve strane, navodimo bilo koju od asumpcija na kojima počiva disjunkcija (ovde (1) počiva na samoj sebi, zbog čega je ovde navedena), zajedno sa bilo kojom od asumpcija koja je upotrebljena da se derivira konkluziju iz disjunkata nezavisno od samih disjunkata (sagledavanje navoda sa leve strane u redovima (3) i (5) pokazuje da nema nijednog takvog). Ovaj dokaz trebalo bi da naglasi značaj doslednog pridržavanja obeležavanja asumpcija koje se nalaze na levoj strani dokaza; redovi (3) i (5) ovde pružaju ispravnu konkluziju Q v P, ali ne iz prave asumpcije koju predstavlja (1); on je postignut tek u redu (6) koji se razlikuje od redova (3) i (5) po beleženju sa desne strane.

20 Q -> R ⊢ (P v Q) -> (P v R)

1	(1)	Q -> R	A
2	(2)	P v Q	A
3	(3)	P	A
3	(4)	P v R	3 vI
5	(5)	Q	A
1,5	(6)	R	1,5 MPP
1,5	(7)	P v R	6 vI
1,2	(8)	P v R	2,3,4,5,7 vIE
1	(9)	(P v Q) -> (P v R)	2,8 CP

Željena konkluzija je ovde kondicional; zbog toga pretpostavljamo njegov antecedent P v Q (red (2)) i težimo tome da dokažemo P v R; ova je asumpcija disjunkcija, pa zato u nastavku pretpostavljamo svaki od disjunkata zasebno (redovi (3) i (5)) i deriviramo konkluziju P v R iz svakog od njih (redovi (4) i (7)). Zbog toga u redu (8) stoji navođenje sa desne strane 2,3,4,5 i 7. Asumpcije koje su u redu (8) jesu one na kojima počiva disjunkcija P v Q (samo (2)) zajedno sa bilo kojom drugom koja je upotrebljena da bi se dobilo P v R iz (3), a da nije (3) samo (ovde to nijednom nije slučaj, što potvrđuje red (4)), i bilo kojom koja je upotrebljena da bi se dobilo P v R iz (5) osim samog (5), (naime (1), o čemu svedoči red (7)). Korak CP upotpunjuje dokaz željenog kondicionala iz (1).

21 P v (Q v R) ⊢ Q v (P v R)

1	(1)	P v (Q v R)	A
2	(2)	P	A

2	(3)	P v R	2 vI
2	(4)	Q v (P v R)	3 vI
5	(5)	Q v R	A
6	(6)	Q	A
6	(7)	Q v (P v R)	6 vI
8	(8)	R	A
8	(9)	P v R	8 vI
8	(10)	Q v (P v R)	9 vI
5	(11)	Q v (P v R)	5,6,7,8,10 vE
1	(12)	Q v (P v R)	1,2,4,5,11 vE

Ovaj dokaz iziskuje detaljnije ispitivanje, kako s obzirom na vI, tako i na vE. Neophodno je više pažnje obratiti na stavljanje zagrada. Asumpcija je disjunkcija, čiji je drugi disjunkt takođe disjunkcija. Dokaz se sastoji od dva različita dela, redova (2)-(4) i redova (5)-(11): prvi deo utemeljuje željena konkluzija iz prvog disjunkta prvobitne disjunkcije (red (4)), a drugi deo utemeljuje istu konkluziju iz drugog disjunkta (red (11)). Ovo objašnjava završni korak vE u redu (12). Drugi deo (redovi (5)-(11)), koji počinje sa disjunktivnom asumpcijom, takođe se sastoji iz dva pod-dela i iziskuje dopunski korak vE u redu (11). Redovi (6)-(7) postižu konkluziju na osnovu prvog disjunkta Q iz (5), a redovi (8)-(10) postižu konkluziju na osnovu drugog disjunkta R. Zbog toga je konačna konkluzija postignuta ne manje od pet puta tokom dokaza, i to svaki put iz različitih asumpcija.

Reductio ad absurdum (RAA)

Poslednje pravilo koje treba uvesti na ovom stupnju u mnogo čemu je najmoćnije i najkorisnije; lako ga je razumeti, mada nešto teže dosledno ustanoviti. Nazvaćemo ga *pravilo reductio ad absurdum* (RAA). Prvo određujemo *kontradikciju*. *Kontradikcija* je konjunkcija drugog konjunkta čija negacija je prvi konjunkt: tako su P & ¬P, R & ¬R, (P -> Q) & ¬(P -> Q) sve redom kontradikcije. Pretpostavi sada da iz neke asumpcije A, možda zajedno sa drugim asumpcijama, možemo derivirati kontradikciju kao konkluziju; tada nam RAA dozvoljava da deriviramo ¬A kao konkluziju iz ovih drugih asumpcija (ako ih ima). Ovo pravilo počiva na prirodnom načelu da, ako kontradikcija može biti deducirana iz A, A ne može biti istinito, tako da smo

ovlašćeni da tvrdimo njegovu negaciju ¬A. Ovo su primeri.

22 P -> Q, P -> ¬Q ⊢ ¬P

1	(1)	P -> Q	A
2	(2)	P -> ¬Q	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 MPP
2,3	(5)	¬Q	2,3 MPP
1,2,3	(6)	Q & ¬Q	4,5 &I
1,2	(7)	¬P	3,6 RAA

Ovo je tipičan primer upotrebe RAA. Težeći ka konkluziji ¬P pretpostavljamo (red (3)) P, očekujući da odatle deriviramo kontradikciju, zato što, ako P vodi kontradikciji, pomoću RAA možemo zaključiti ¬P. U redu (6) dobijamo kontradikciju Q & ¬Q, pa tako u redu (7) zaključujemo ¬P. Sa desne strane, navodimo asumpciju koju sumnjičimo za kontradikciju - onu čiju negaciju zaključujemo u koraku RAA, ovde je to (3) - i samu kontradikciju, ovde (6). Sa leve strane, kao i kod koraka CP, broj asumpcija se prirodno smanjuje za jednu - biva ispuštena ona koju smo osumnjičili za kontradikciju.

23 P -> ¬P ⊢ ¬P

1	(1)	P -> ¬P	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	¬P	1,2 MPP
1,2	(4)	P & ¬P	2,3 &I
1	(5)	¬P	2,4 RAA

Ponovo težeći da dobijemo ¬P, pretpostavljamo P (red (2)) i dobijamo kontradikciju (red (4)). Prema tome, pošto je dato (1) zaključujemo ¬P pomoću RAA. Dokazani sekvent je očit, mada možda neočekivan - kada je dato da ako je neki iskaz slučaj onda je slučaj i njegova negacija, možemo zaključiti da je njegova negacija istinita. Ovo je prvi iznenađujući rezultat koji je ustanovljen pomoću naših pravila, ali biće ih još.

Pravilo RAA je posebno korisno kada želimo da deriviramo *negativne* konkluzije. Ono sugeriše da, umesto da pokušamo da načinimo direktan dokaz, treba da pretpostavimo odgovarajući *potvrdni* iskaz i pokušamo da deriviramo kontradikciju, na taj način posredno uvtvrđujući negativan. Ono takođe može biti

upotrebljeno da bi utvrdili i same potvrdne iskaze, via DN. Ako želimo da deriviramo A, možemo pretpostaviti ¬A i dobiti kontradikciju. Pomoću RAA možemo zaključiti ¬¬A (negaciju onoga što smo pretpostavili) i tako pomoću DN dobijamo A. Vredno opšte uputstvo za traženje dokaza sastoji se u tome da ako direktni pokušaji propadnu obično će poći za rukom pomoću dokaza putem RAA.

Do sada je uvedeno deset pravila derivacije: do Poglavlja 3 neće nam biti potrebno nijedno novo pravilo.

V e ž b e

1 Pronađi dokaze za sledeće sekvente:

(a) P ⊢ Q -> (P & Q)
(b) P & (Q & R) ⊢ Q & (P & R)
(c) (P -> Q) & (P -> R) ⊢ P -> (Q & R)
(d) Q ⊢ P v Q
(e) P & Q ⊢ P v Q
(f) (P -> R) & (Q -> R) ⊢ (P v Q) -> R
(g) P -> Q, R -> S ⊢ (P & R) -> (Q & S)
(h) P -> Q, R -> S ⊢ (P v R) -> (Q v S)
(i) P -> (Q & R) ⊢ (P -> Q) & (P -> R)
(j) ¬P -> P ⊢ P

\ greška

2 Pokaži da su sledeći sekventi neosnovani, tražeći takve stvarne iskaze za P i Q kod kojih je asumpcija istinita a konkluzija lažna:

(a) P ⊢ P & Q
(b) P v Q ⊢ P
(c) P v Q ⊢ P & Q
(d) P -> Q ⊢ P & Q

4 Bikondicional

Postoji operator koji učestvuje u formiranju rečenica, od izuzetnog značaja za logičara mada se retko događa u običnom jeziku, a koji sve do sada nismo upoznali. To je ´...ako i samo ako...´. Ispitaćemo ga u ovome odeljku.

Za početak razmotrimo razliku između ´ako...onda...´ i ´samo ako...onda...´. Uporedi sledeća dva iskaza:

(1) ako pada sneg biva hladnije;
(2) samo ako pada sneg biva hladnije.

(1) tvrdi da je padanje snega *dovoljno* da bi bilo hladnije, dok (2) tvrdi da je padanje snega *nužno* da bi bilo hladnije, odnosno, da ako biva hladnije sneg *mora* padati. Zato ćemo moći da kažemo da kada god je slučaj da ako P onda Q - P je *dovoljan uslov* za Q, a kada je god slučaj da samo ako P onda Q - P je *nužan uslov* za Q. Da bismo učinili ovo temeljno razlikovanje jasnijim, uporedimo

(3) ako udariš čekićem po staklu, razbićeš ga;
(4) samo ako udariš čekićem po staklu, razbićeš ga.

(3) je vrlo blizu istini; (4) je, opet, blizu laži, zato što postoje drugi načini da se razbije staklo osim zamahivanja čekićem. S druge strane, od dva iskaza

(5) ako koristiš odvijač, odvrnućeš taj veoma zategnut zavrtanj;
(6) samo ako koristiš odvijač, odvrnućeš taj veoma stegnuti zavrtanj,

(5) može lako biti lažno (možeš koristiti odvijač a da ipak ne odvrneš zavrtanj) a (6) istinito zato što može biti da nema drugog načina da se zavrtanj odvije osim pomoću odvijača. Udaranje čekićem je (možda) dovoljan ali ne i nužan uslov da bi se razbilo staklo; upotreba odvijača je (možda) nužan ali ne i dovoljan uslov za odvijanje zategnutog zavrtnja.

U naučnom i matematičkom rasuđivanju, a naposletku i u logici, često nas zanima uslov koji je *i dovoljan i nužan*. P će biti dovoljan i nužan uslov za Q samo u slučaju da Q važi *ako i samo ako* važi P. Otuda naše zanimanje za '...ako i samo ako...'. Zbog toga se može činiti da nam je neophodan poseban simbol za 'samo ako...onda...'; ali da nije sasvim tako, može se videti iz sledećeg.

Pretpostavimo da samo ako P onda Q; tada je P nužan uslov sa Q, odnosno da bi Q bilo slučaj P mora biti slučaj, pošto ako je Q slučaj, onda je i P. Na primer, pretpostavimo, kao maločas, da je upotreba odvijača nužan uslov za odvrtanje zavrtnja; tada, ako je zavrtanj odvrnut, bio je upotrebljen odvijač. Ukratko, kada je dato samo ako P onda Q, možemo zaključiti da ako Q onda P. Obratno, pretpostavimo da ako Q onda P; tada, da bi Q bilo slučaj mora biti slučaj da P, zato što ako je Q slučaj a P nije slučaj ne može važiti da ako Q onda P; zbog toga što je P nužan uslov za Q, odnosno samo ako P onda Q. Ova dva argumenta

navode na to da tvrditi samo ako P onda Q jeste tvrditi ako Q onda P. Zbog toga da bismo izrazili simbolički 'samo ako P onda Q' možemo upotrebiti '->' i jednostavno napisati

Q -> P.

Tvrditi, prema tome, da Q *ako i samo ako* P jeste što i tvrditi da ako P onda Q i samo ako P onda Q, što znači tvrditi da ako P onda Q i ako Q onda P; ili, simbolima,

(P -> Q) & (Q -> P).

Ali da bismo upotrebljavali ovaj složeni izraz možemo na osnovu dogovora prihvatiti dvostruku strelicu i zapisati ga u skraćenom obliku

P <-> Q.

(Ovaj simbol nam pomaže da naglasimo obostranost ovog odnosa izmedu P i Q.) Iskaz P <-> Q zovemo *bikondicional* P i Q.

Koja su svojstva bikondicionala u argumentu? Mogli bismo ustanoviti pravila derivacije za ovaj operator, kao što je to učinjeno za četiri operatora iz prethodna dva odeljka. Ali svojstva '<->' zapravo slede neposredno iz svojstava '&' i '->' i to na način na koji smo upravo odredili bikondicional. Na primer:

24 P <-> Q ⊢ Q <-> P

1	(1)	P <-> Q	A
1	(2)	(P -> Q) & (Q -> P)	1 df. <->
1	(3)	P -> Q	2 &E
1	(4)	Q -> P	2 &E
1	(5)	(Q -> P) & (P -> Q)	4,3 &I
1	(6)	Q <-> P	5 df. <->

Ovde je korak od (1) do (2) opravdan uzimanjem 'P <-> Q' kao skraćenja za '(P -> Q) & (Q -> P)': u (2) samo razvijamo ono što smo pretpostavili u (1). Slično, mada obrnuto, opravdan je korak od (5) do (6): zato što je (6) samo skraćenje za konkluziju (5). Medutim, pošto je neophodno da takav korak preciznije potvrdimo uvodimo na kraju sledeću formalnu definiciju bikondicionala:

Df.<-> : A <-> B = (A -> B) & (B -> A).

Ovu definiciju treba shvatiti kao jezgroviti način kazivanja: kada su date bilo koje dve rečenice A i B, u dokazu možemo zameniti rečenicu A <-> B rečenicom (A -> B) & (B -> A) i vice versa. Kada je ova definicija primenjena sa desne strane navodimo '*Df.*<->'. Redovi (2) i (6) u poslednjem dokazu trebalo bi da su zapravo tako obeleženi.

Sledećih nekoliko dokaza približava nam upotrebu ove definicije.

25 P, P <-> Q ⊢ Q

1	(1)	P	A
2	(2)	P <-> Q	A
2	(3)	(P -> Q) & (Q -> P)	2 *Df.*<->
2	(4)	P -> Q	3 &E
1,2	(5)	Q	1,4 MPP

26 P <-> Q, Q <-> R ⊢ P <-> R

1	(1)	P <-> Q	A
2	(2)	Q <-> R	A
1	(3)	(P -> Q) & (Q -> P)	1 *Df.*<->
1	(4)	P -> Q	3 &E
1	(5)	Q -> P	3 &E
2	(6)	(Q -> R) & (R -> Q)	2 *Df.*<->
2	(7)	Q -> R	6 &E
2	(8)	R -> Q	6 &E
9	(9)	P	A
1,9	(10)	Q	4,9 MPP
1,2,9	(11)	R	7,10 MPP
1,2	(12)	P -> R	9,11 CP
13	(13)	R	A
2,13	(14)	Q	8,13 MPP
1,2,13	(15)	P	5,14 MPP
1,2	(16)	R -> P	3,15 CP
1,2	(17)	(P -> R) & (R -> P)	12,16 &I
1,2	(18)	P <-> R	17 *Df.*<->

Da bismo derivirali P <-> R pomoću *Df.*<-> potrebno nam je da deriviramo (P -> R) & (R -> P) i da težimo svakom konjunktu posebno. Prvih osam redova dokaza iznose jedino obaveštenje dobijeno iz asumpcija na osnovu primene *Df.*<-> i &E. Ovo obaveštenje (redovi (4), (5), (7), (8)) je zatim dosledno korišćeno da bi se derivirala dva neophodna konjunkta (redovi (9)-(12) i (13)-(16)).

27 (P & Q) <–> P ⊢ P –> Q

1	(1)	(P & Q) <–> P	A
1	(2)	((P & Q) –> P) & (P –> (P & Q))	1 *Df.*<–>
1	(3)	P –> (P & Q)	2 &E
4	(4)	P	A
1,4	(5)	P & Q	3,4 MPP
1,4	(6)	Q	5 &E
1	(7)	P –> Q	4,6 CP

Na osnovu *Df.*<–>, (1) predstavlja skraćenje za (2), ako uzmemo da je A rečenica 'P & Q' a B rečenica 'P'.

28 P & (P <–> Q) ⊢ P & Q

1	(1)	P & (P <–> Q)	A
1	(2)	P & ((P –> Q) & (Q –> P))	1 D*f.*<–>
1	(3)	P	2 &E
1	(4)	(P –> Q) & (Q –> P)	2 &E
1	(5)	P –> Q	4 &E
1	(6)	Q	3,5 MPP
1	(7)	P & Q	3,6 &I

U prethodnim dokazima, kada je primenjena *Df.*<–>, bila je prime-njena na rečenice u celini, tj. rečenica na koju je bila primenjena imala je oblik A <–> B, ali ovo nije od suštinskog značaja: ovde je u stvari, u redu (2) ona primenjena na drugi konjunkt iskaza u redu (1).

Mada *Df.*<–> nalikuje na deset do sada navedenih pravila derivacije, po tome što opravdava prelaze u dokazu, njega ne treba shvatiti kao još jedno pravilo koje je pridodato ovim ostalim. Njegova je uloga u dokazu pre ta da nam omogući da iskoristimo prednost dela simboličkog skraćivanja, nego da nam neposredno omogući da deriviramo konkluzije iz premisa. Događa se da nas, zbog izvesnih razloga, zanimaju takvi složeni iskazi kao što je (P –> Q) & (Q –> P), a da bismo olakšali naše ispitivanje ovih dokaza saglašavamo se sa tim da skratimo izraze za njih na takve rečenice kao što je 'P <–> Q'. Ovo neka bude putokaz za oko, mamac bačen pred ljudsku slabost: na primer, ako smo dovoljno vešti, možemo, umesto 27 gore, dokazati samo

(7) ((P & Q) –> P) & (P –> (P & Q)) ⊢ P –> Q;

ali ovde upotrebljeni izraz samo razotkriva obrazac koji bismo u

izrazu (7) mogli i da izostavimo. Prema tome, ako želimo da iskoristimo prednosti ovoga skraćivanja u dokazima, potrebno nam je uputstvo za transformaciju rečenica koje sadrže '<–>' u rečenice koje ga ne sadrže, i obrnuto uputstvo za transformaciju rečenica čiji pravi oblik nema '<–>' u rečenice koje ga sadrže: a to je upravo ono što pruža *Df.*<–>. Drugim rečima, bilo koja logička svojstva za koja se može činiti da imaju '<–>', samo su svojstva '&' i '–>' zaogrnuta simboličkim ruhom.

Takva definicija kao što je *Df.*<–> može se nazvati *stipulativnom* definicijom, zato što se njome stipuliraju ili određuju uslovi značenja simbola '<–>' u terminima simbola '–>' i '&' čije značenje je poznato iz pravila rukovođenja njima u razvijanju dokaza. Reći da je definicija stipulativna ne znači isto što i reći da je ona *proizvoljna* (mada je stvarni izabrani simbol '<–>' sasvim proizvoljno biran). Zaista, temelj za ovu definiciju sam pripremio pažljivo je zasnivajući na tome da ono što mi shvatamo pod iskazom da Q ako i samo ako P jeste zapravo to da ako P onda Q i ako Q onda P. Ali formalno ta je definicija stipulativna po tome što ona naglašava naprosto određen način na koji znak *treba da bude prihvaćen*

V e ž b e

1 Koristeći *Df.*<–> u konjunkciji sa pravilima derivacije iz odeljaka 2 i 3, nađi dokaze za sledeće sekvente:

(a) Q,P <–> Q ⊢ P
(b) P –> Q, Q –> P ⊢ P <–> Q
(c) P <–> Q ⊢ ¬P <–> ¬Q
(d) ¬P <–> ¬Q ⊢ P <–> Q
(e) (P v Q) <–> P ⊢ Q –> P
(f) P <–> ¬Q, Q <–> ¬R ⊢ P <–> R

2 Kao što '...ako i samo ako...' može biti određeno terminima 'ako...onda...' i '...i...', tako '...ako ne...' može biti određeno terminima 'ako...onda...' i 'ne'. Kao što je tvrditi da je Q bez P isto što i tvrditi da ako ne P onda Q (prikaži to ispitujući slučajeve). Pokušaj zatim da to stipuliraš kao

Df.* : A * B = ¬A –> B.

Koristeći Df.* na način paralelan sa *Df.*<–>, pronađi dokaze za sledeće sekvente:

(a) P * Q ⊢ Q * P
(b) P * Q, P * R ⊢ P * (Q & R)
(c) P * Q, R * ¬Q ⊢ P * R
(d) P * P ⊢ P
(e) ¬P * R, ¬Q * R, P v Q ⊢ R

5 Dalji dokazi: rezime pravila

Sada ispitujemo upotrebu naših pravila derivacije pomoću nekih dalje izvedenih dokaza. Dokazani sekventi su sami po sebi vredni ispitivanja, zato što pokazuju neka od sasvim osnovnih formalnih svojstava operatora koje sadrže; formalna izrada takođe zaslužuje pažnju, zbog toga što najčešće ilustruje tehniku kojom student treba da ovlada kao sredstvom za samostalno iznalaženje dokaza. Nakon mnoštva dokaza dodaću i beleške koje se odnose na neka zanimljiva svojstva i pokušaću da ukažem na to kako se do tih dokaza došlo. Treba imati u vidu da nema doslednih pravila za iznalaženje dokaza; mogu se dati nagoveštaji, ali najvažnije je njegovo stvarno izvođenje. (U tu svrhu student može da pokuša da ponovo pronađe dokaze sekvenata iz prethodnog odeljka.) Na kraju ovoga odeljka, radi korisne preglednosti, dodaću stav koji se odnosi na do sada uvedena pravila.

29 P ⊢ P
1 (1) P A

Nema sekventa koji može da bude dokazan a koji je kraći od ovoga i njegov je dokaz najkraći mogući dokaz: on zahteva dužnu pažnju. Red (1) tvrdi da kada je dato (1) sledi P; šta je (1)? - sam iskaz P. Naime, kada je dato P možemo zaključiti P, što je sekvent koji treba dokazati. Da li je ovo zaista osnovano? Često se smatra da je neosnovano izvesti P iz P, na osnovu toga da je argument cirkularan, ali to je stvar nesporazuma; svakako da je argument cirkularan (u pučkom smislu) ali cirkularan argument je sasvim osnovan (mada krajnje beskoristan). Kada je dato da pada kiša, *najsigurnija moguća* konkluzija jeste da pada kiša. Ako sam izveo iskaz iz njega samog, nisam načinio grešku u rasuđivanju, mada nisam ni napredovao u obaveštavanju. Sa ovog stanovišta, pravilo o asumpcijama je dosledno zasnovano na načelu osnovanosti cirkularnog argumenta; zato što pravilo o asumpcijama tvrdi da kada je dat izvestan iskaz možemo izvesti barem taj iskaz.

Neka A i B budu dva iskaza takva da možemo dokazati i sekvent A $\vdash$ B i sekvent B $\vdash$ A; tada možemo reći da su A i B *međuizvodivi* i tu činjenicu pišemo ovako:

$$A \dashv\vdash B,$$

koristeći uputan simbol. Na primer, poređenje sekvenata 13 i 16 (Odeljak 3) pokazuje da su (P & Q) -> R i P -> (Q -> R) međuizvodivi, tako da možemo ujedno zapisati:

30 (P & Q) -> R $\dashv\vdash$ P -> (Q -> R).

U utvrđivanju međuzavisnosti rezultata izrada se sasvim prirodno grana u dva pravca. Naime:

31 P & (P v Q) $\dashv\vdash$ P

(a) P & (P v Q) $\vdash$ P

1	(1)	P & (P v Q)	A
1	(2)	P	1 &E

(b) P $\vdash$ P & (P v Q)

1	(1)	P	A
1	(2)	P v Q	1 vI
1	(3)	P & (P v Q)	1,2 &I

U dokazivanju (31(b)) da P & (P v Q) sledi iz P dokazujemo da svaki konjunkt sledi zasebno: da P sledi iz P je zapravo već dato u redu (1) (uporedi 29 gore kao i napomenu koja tome sledi).

32 P v (P & Q) $\dashv\vdash$ P

(a) P v (P & Q) $\vdash$ P

1	(1)	P v (P & Q)	A
2	(2)	P	A
3	(3)	P & Q	A
3	(4)	P	3 &E
1	(5)	P	1,2,2,3,4 vE

(b) P $\vdash$ P v (P & Q)

1	(1)	P	A
1	(2)	P v (P & Q)	1 vI

U 32(a) da bismo pokazali da P sledi iz disjunkcije P v (P & Q) neophodno nam je da pokažemo da ono sledi iz svakog disjunkta redom, s obzirom na primenu vE. Da P sledi iz P dato je u redu

(2) (uporedi opet 29), a da ono sledi iz P & Q dokazano je pomoću &E u redu (4). Ovo bi trebalo da objasni dvostruko navođenje ´2´ u redu (5) sa desne strane: prvo ´2´ označava asumpciju prvog disjunkta P u toj liniji, a drugo ´2´ označava da je konkluzija P derivirana iz te asumpcije u istom redu.

33 P v P ⊣⊢ P

(a) P v P ⊢ P

1	(1)	P v P	A
2	(2)	P	A
1	(3)	P	1,2,2,2,2 vE

(b) P ⊢ P v P

1	(1)	P	A
1	(2)	P v P	1 vI

33(a), red (3), ukazuje na ograničeni slučaj upotrebe vE. Da bismo derivirali P iz P v P potrebno nam je da pomoću vE pokažemo da P sledi iz svakog disjunkta posebno, mada su disjunkti isti, tj. samo P, tako da je celokupna izrada učinjena pomoću reda (2): zbog toga je četiri puta navedeno ´2´ sa desne strane u redu (3).

34 P, ¬(P & Q) ⊢ ¬Q

1	(1)	P	A
2	(2)	¬(P & Q)	A
3	(3)	Q	A
1,3	(4)	P & Q	1,3 &I
1,2,3	(5)	(P & Q) & ¬(P & Q)	2,4 &I
1,2	(6)	¬Q	3,5 RAA

Da bismo derivirali ¬Q postupamo posredno i pretpostavljamo Q, nadajući se da ćemo dobiti kontradikciju; ovo je postignuto u redu (5), odakle RAA vodi do željenog sekventa. Načelo rasuđivanja na koje se odnosi 34 ima srednjovekovno ime *modus ponendo tollens*: ako je P slučaj, a nije slučaj da i P i Q, tada nije slučaj da Q.

35 P -> Q ⊣⊢ ¬(P & ¬Q)

(a) P -> Q ⊢ ¬(P & ¬Q)

1	(1)	P -> Q	A
2	(2)	P & ¬Q	A
2	(3)	P	2 &E

2	(4)	¬Q	2 &E
1,2	(5)	Q	1,3 MPP
1,2	(6)	Q & ¬Q	4,5 &I
1	(7)	¬(P & ¬Q)	2,6 RAA

(b) ¬(P & ¬Q) ⊢ P -> Q

1	(1)	¬(P & ¬Q)	A
2	(2)	P	A
3	(3)	¬Q	A
2,3	(4)	P & ¬Q	2,3 &I
1,2,3	(5)	(P & ¬Q) & ¬(P & ¬Q)	1,4 &I
1,2	(6)	¬¬Q	3,5 RAA
1,2	(7)	Q	6 DN
1	(8)	P -> Q	2,7 CP

35(a): još jedan posredan dokaz - pretpostavljamo (red (2)) P & ¬Q i težimo ka kontradikciji. Redovi (3) i (4) su pomocu &E razradili obaveštenje dato u redu (2) i željena kontradikcija sledi gotovo neposredno (red (6)). 35(b) je nešto složenije. Težeći da dokažemo P -> Q, pretpostavljamo P (red (2)) i uzimamo Q kao usputni pravac, uzdajući se u CP da bismo nadoknadili ravnotežu u poslednjem koraku. Čini se da nema direktnog načina derivacije Q iz (1) i (2), pa zato pretpostavljamo ¬Q (red (3)) i težimo kontradikciji. Pomoću &I asumpcije (2) i (3) su u kontradikciji sa (1), što smo utvrdili u redu (5). Pomoću RAA ovo pruža ¬¬Q iz (1) i (2), a odatle Q pomoću DN (red (8)).

36 P v Q ⊣⊢ ¬(¬P & ¬Q)

(a) P v Q ⊢ ¬(¬P & ¬Q)

1	(1)	P v Q	A
2	(2)	¬P & ¬Q	A
3	(3)	P	A
2	(4)	¬P	2 &E
2,3	(5)	P & ¬P	3,4 &I
3	(6)	¬(¬P & ¬Q)	2,5 RAA
7	(7)	Q	A
2	(8)	¬Q	2 &E
2,7	(9)	Q & ¬Q	7,8 &I
7	(10)	¬(¬P & ¬Q)	2,9 RAA
1	(11)	¬(¬P & ¬Q)	1,3,6,7,10 vE

(b) ¬(¬P & ¬Q) ⊢ P v Q

1	(1)	¬(¬P & ¬Q)	A
2	(2)	¬(P v Q)	A
3	(3)	P	A
3	(4)	P v Q	3 vI
2,3	(5)	(P v Q) & ¬(P v Q)	2,4 &I
2	(6)	¬P	3,5 RAA
7	(7)	Q	A
7	(8)	P v Q	7 vI
2,7	(9)	(P v Q) & ¬(P v Q)	2,8 &I
2	(10)	¬Q	7,9 RAA
2	(11)	¬P & ¬Q	6,10 &I
1,2	(12)	(¬P & ¬Q) & ¬(¬P & ¬Q)	1,11 &I
1	(13)	¬¬(P v Q)	2,12 RAA
1	(14)	P v Q	13 DN

I 36(a) i 36(b) su instruktivni dokazi i zaslužuju da ih bliže razmotrimo. Osnovna ideja u 36(a) jeste dokaz pomoću vE. Kada je data disjunktivna asumpcija pretpostavljamo (red (3)) prvi disjunkt i odatle težimo konkluziji, pa pretpostavljamo (red (7)) drugi disjunkt i odatle težimo istoj toj konkluziji. U svakom od slučajeva konkluzija je dobijena pomoću RAA, zbog čega pretpostavljamo jedanput za sve (red (2)) ¬P & ¬Q čiju negaciju želimo da dobijemo. Redovi (3)-(6) postižu prvi deo cilja, a redovi (7)-(10) drugi deo. Osnovna ideja u 36(b) jeste dokaz putem RAA. Pretpostavili smo (red (2)) negaciju željene konkluzije i tražimo kontradikciju. Jasno je da je ¬P & ¬Q ono što je u kontradikciji sa asumpcijom (1), tako da je sada cilj da se deriviraju ¬P i ¬Q nezavisno od (2). Da bismo izveli ¬P pretpostavljamo P (red (3)) i dobijamo kontradikciju (red (5)), pa otuda ¬P sledi iz (2) (red (6)). Na paralelan način ¬Q će isto tako slediti iz (2) (red (10)). Tako dobijamo željenu kontradikciju u redu (12). Treba imati u vidu da u redu (11) ovoga dokaza imamo dosledno dokazan sekvent ¬(P v Q) ⊢ ¬P & ¬Q (uporedi vežbu 1(f) na kraju odeljka).

Deset pravila koja smo do sada koristili omogućuju nam da dokažemo zanimljive i u izvesnim slučajevima neočigledne rezultate koji se tiču međusobnih odnosa naših operatora koji učestvuju u formiranju rečenica. Nakon njihovog sagledavanja, skloni smo još i tome da ova pravila usvojimo i kao osnovna i očigledna načela rasuđivanja: barem u tom smislu što nas od istinitih premisa neće navesti na lažne konkluzije. Od sada bi trebalo da je jasno da uvidi u odgovara-

juću kodifikaciju argumenata koje smo do sada postigli zavisi uglavnom od usvajanja posebne notacije kao i od pravila čija primena može biti *mehanički proverena*. Zaista, ako neko sumnja u naše konkluzije, možemo mu izložiti naše dokaze i tražiti da tačno utvrdi koji korak mu se čini invalidnim i zašto. U tom smislu, situacija je slična onoj u aritmetici: nema koristi od toga što se neko samo ne slaže sa izvesnim proračunom; treba reći *gde* je učinjena greška i na osnovu čega se to tvrdi. Da li je u nekom redu u bilo kojem dokazu učinjena greška može se mehanički odrediti jednostavnim upoređivanjem tog reda sa pravilom na osnovu kojeg se taj red opravdava.

Sažet prikaz pravila derivacije

1 *Pravilo za asumpcije* (A)

Može se uvesti bilo koji iskaz na bilo kojem stupnju dokaza. Sa leve strane pišemo broj samog tog reda.

2 *Modus ponendo ponens* (MPP)

Kada je dato A i A –> B, možemo derivirati B kao konkluziju. B se zasniva na bilo kojoj od asumpcija na kojoj se zasniva ili A ili A –> B.

3 *Modus tollendo tollens* (MTT)

Kada je dato ¬B i A –> B možemo derivirati ¬A kao konkluziju. ¬A se zasniva na bilo kojoj od asumpcija na kojoj se zasniva ili ¬B ili A –> B.

4 *Dvostruka negacija* (DN)

Kada je dato A, kao konkluziju možemo derivirati ¬¬A i vice versa. U oba slučaja konkluzija se zasniva na asumpciji koja je istovetna sa premisom.

5 *Kondicionalni dokaz* (CP)

Kada je dat dokaz za B koji počiva na A kao asumpciji, na preostalim asumpcijama (ako ih ima) možemo derivirati konkluziju A –> B.

6 *Uvođenje &* (&I)

Kada je dato A i B, možemo derivirati A & B kao konkluziju. A & B se zasniva na bilo kojoj od asumpcija na kojima se zasnivaju ili A ili B.

7 *Eliminacija &* (&E)

Kada je dato A & B, možemo derivirati posebno ili A ili B. U oba slučaja, konkluzija se zasniva na asumpciji koja je istovetna sa premisom.

8 *Uvođenje v* (vI)

Kada je dato posebno A ili B, možemo derivirati A v B kao konkluziju. U oba slučaja konkluzija se zasniva na asumpciji istovetnoj sa premisom.

9 *Eliminacija v* (vE)

Kada je dato A v B, zajedno sa dokazom C koji počiva na A kao asumpciji i dokazom C koji počiva na B kao asumpciji, možemo derivirati C kao konkluziju. C se zasniva na bilo kojoj od asumpcija na kojima se zasnivaju A v B, plus na onima na kojima se zasniva C u njegovoj derivaciji iz A (a da nije A samo), plus na onima na kojima se zasniva C u njegovoj derivaciji iz B (a da nije B samo).

10 *Reductio ad absurdum* (RAA)

Kada je dat dokaz B & ¬B koji počiva na A kao asumpciji, možemo derivirati ¬A kao konkluziju na osnovu preostalih asumpcija (ukoliko ih ima).

Napomena: Znak za bikondicional '<–>' uveden je sledećom definicijom:

Df.<–>: A <–> B = (A –> B) & (B –> A)

Ova definicija nam dozvoljava da pojavljivanje A <–> B u konkluziji zamenimo sa (A –> B) & (B –> A) i vice versa.

V e ž b e

1 Nadi dokaze za sledeće sekvente:

(a) P v Q ⊢ P v Q
(b) P & P ⊣⊢ P
(c) P & (Q v R) ⊣⊢ (P & Q) v (P & R)
(d) P v (Q & R) ⊣⊢ (P v Q) & (P v R)
(e) P & Q ⊣⊢ ¬(P –> ¬Q)
(f) ¬(P v Q) ⊣⊢ ¬P & ¬Q
(g) ¬(P & Q) ⊣⊢ ¬P v ¬Q
(h) P & Q ⊣⊢ ¬(¬P v ¬Q)
(i) P –> Q ⊢ ¬P v Q
(j) ¬P –> Q ⊢ P v Q

POGLAVLJE 2

ISKAZNI RAČUN II

Uvod

U prethodnom poglavlju smo postepeno naučili ono što bi se moglo opisati kao *formalni jezik*, jezik oblikovan za ispitivanje izvesnih obrazaca argumenta, koji je donekle blizak načinu na koji je jezik elementarne matematike oblikovan za ispitivanje izvesnih numeričkih operacija (sabiranje, oduzimanje, itd.). Na osnovu razloga koji bi trebalo da su očigledni, ovaj se jezik naziva *iskazni račun* (ponekad još i *rečenički* račun). U ovom ćemo ga poglavlju ispitivati više na teorijskom nivou, da bismo time postigli jasniji uvid u njegova svojstva i njegovu moć. Među pitanjima koja ćemo postaviti tri su najznačajnija. (i) U matematici se obično događa da rezultat, koji je jednom već dokazan, može biti bez ponovnog dokazivanja upotrebljen u dobijanju novih rezultata - matematika je *progresivna* baš u ovom smislu, kao što je to poznato svakom studentu Euklidove geometrije. Postoje li bilo kakva analogna sredstva pomoću kojih bismo mogli koristiti sekvente koji su već dokazani, kako bismo potpomogli otkrivanje dokaza za druge sekvente? U Odeljku 2 dat je potvrdan odgovor. (ii) Koliko god da se pouzdavamo u to da su naša pravila derivacije sigurna sa intuitivnog stanovišta, postoji li uopšte neki način koji bi i *pokazao* da su ona pouzdana, pokazujući pri tome da iz njih neće proisticati sekventi koji zapravo nisu validni. Ovaj postupak pružen je u Odeljcima 3 i 4. (iii) Već smo uveli deset pravila derivacije za rukovanje simbolima ovog jezika: jesu li ona dovoljna, ili su nam pak neophodna još neka? Odeljak 5 pokazuje da naša pravila u izvesnom smislu obrazuju *potpun* skup i da nam nije potrebno

ništa više od toga. Odgovori na ova i slična pitanja pružaju dublje razumevanje prirode iskaznog računa.

1 Pravila formiranja

Kako sam to već spomenuo, iskazni račun je vrsta jezika i kao takav on ima gramatiku, ili određenije rečeno, *sintaksu*. U našem krajnje postupnom pristupu mi smo ovu sintaksu uzeli kao nešto što je nesumnjivo; ali ne možemo otići mnogo dalje od toga bez ozbiljnije zasnovanog stanovišta o strukturi samoga jezika. Posebno, uzeli smo kao nesumnjivo ono što je bilo shvaćeno kao *rečenica u simbolizmu*, deo zadatka koji stoji pred nama kao logičarima sastoji se u tome da ovaj pojam učinimo preciznim. Zbog toga ovaj odeljak posvećujemo poslu koji se bavi uvođenjem prilično dugačkih definicija.

Prvo, određujem *zagradu*. Zagrada je jedna od oznaka:

´(´, ´)´,

i prvu vrstu oznake nazivam *leva zagrada* a drugu *desna zagrada*. Ova definicija, koju bi trebalo razumeti bez objašnjenja, jeste *ostenzivna* definicija, koja je nazvana tako zato što *pokazujem* ili *ukazujem* više na to šta je zagrada nego što upotrebljavam druge *reči* da bih odredio značenje neke. (Mogli smo i izbeći ostenzivnu definiciju: mogao sam reći da je zagrada luk kruga, čija je jedna krajnja tačka postavljena vertikalno iznad druge krajnje tačke.)

Drugo, određujem *logički veznik*, koji se obično naziva samo *veznik*. Logički veznik je jedna od oznaka:

´->´, ´¬´, ´&´, ´v´, ´<->´.

Ovo je takođe ostenzivna definicija, koja formalno uvodi simbole koji su u prethodnom poglavlju upotrebljeni kao operatori za formiranje rečenice, odnosno rečenica.

Treće, određujem *(iskaznu) varijablu*. Iskazna varijabla je jedna od oznaka:

´P´, ´Q´, ´R´, ...

Ovo je ponovo ostenzivna definicija, ali znatno različita od prethodne dve. Postoje samo dve vrste oznaka koje se nazivaju zagradama i samo pet koje se nazivaju veznicima; ali ´...´ u

definiciji varijable dato je sa namerom da se ukaže na to da postoji *neograničeno velik* broj različitih takvih oznaka. Buduci da su ljudska ograničenja takva kakva uostalom već jesu, na raspolaganju nam stoji prostor i vreme da navedemo tek konačan broj; zato dodajemo '...'. Zbog toga što nam u praksi retko treba više od četiri različite varijable, ne postoji potreba za tim da odredimo kako bi se ovo navođenje nastavilo. Ali nije naodmet zapamtiti da broj varijabli nema gornju *teorijsku* granicu, da ako nam ikada zatreba neka nova, imamo pravo i da je obrazujemo (na primer, putem dodavanja akcenta i uvođenjem 'P′', 'R′′', itd., u naš spisak).

Četvrto, određujem *simbol (iskaznog računa)* kao *ili zagradu ili veznik ili iskaznu varijablu*. Odatle sledi da je simbol bilo koja od gornjih oznaka.

Peto, određujem *formulu (iskaznog računa)* kao *bilo koji niz simbola*. Ova definicija iziskuje izvesno objašnjenje. S obzirom na nju,

(1) 'P((¬ & Q <–> '
(2) '(P v ¬P)'

obe jesu formule, samim tim što su nizovi simbola: na primer, (2) je niz koji se sastoji od leve zagrade koju sledi događanje varijable 'P', koju sledi veznik 'v', kojeg sledi veznik '¬', kojeg sledi drugo događanje varijable 'P', koju sledi desna zagrada. Ali

(3) 'v P'
&
–>
(–>
R
)

nije formula, zbog toga što nije *niz* simbola, već, pre se može reći, zbrka od simbola. Niz iziskuje poredak, koji (1) i (2) poseduju, ali ne i (3). Naša uobičajena konvencija za pisanje rečenica sastavljenih od simbola sadrži se u tome da će se oni pojavljivati, ne mnogo udaljeni u prostoru jedan od drugog, u poretku s leva na desno. Ovo je savremena evropska konvencija koju sledim u ovoj knjizi, u šta će čitalac imati prilike da se uveri.

Od cele klase formula neke mogu, kao što je to (1) gore, biti

slobodno nazvane besmislenim iil nerazumljivim, dok druge, kao što je (2), imaju smisla i mogu biti shvaćene. Naravno da je samo druga grupa ona koju želimo da upotrebljavamo u našem formalnom poslu, tako da je moramo izdvojiti, ako je to moguće, pomoću precizne definicije. Prema tome, u okviru totaliteta formula, uz pomoć nešto složenije definicije koja ima sedam stavki određujemo potklasu *dobro obrazovanih formula* (well-formed formulae). Da bismo uštedeli prostor, skraćujemo ´dobro obrazovana formula´ na ´wff´ (u množini, ´wffs´), kako na ovom mestu tako i u daljem tekstu.

(a) bilo koja iskazna varijabla je wff;
(b) bilo koja wff kojoj prethodi ´¬´ jeste wff;
(c) bilo koja wff koju sledi ´—>´ iza kojeg sledi bilo koja wff, kada je u celini obuhvaćeno zagradama, jeste wff;
(d) kao *(c)*, sa ´&´ umesto —>´;
(e) kao *(c)*, sa ´v´ umesto ´—>´;
(f) kao *(c)*, sa ´<—>´ umesto ´—>´;
(g) ako formula nije wff s obzirom na stavke *(a)*-*(f)*, onda ona nije wff.

Najbolji način da se vidi da ove stavke uspešno određuju wff jeste da se pruže primeri. Pokazujemo da

(4) ´(((P—>Q) v ¬Q) <—> (¬¬P & Q))´

jeste wff, kao što bismo to želeli da bude, sa gledišta definicije. Prvo, s obzirom na stavku *(a)*,

´P´, ´Q´

su wffs, odatle što su na osnovu *(a)* sve varijable wffs. Pomoću *(b)*, rezultat toga što ´¬´ prethodi wff, takođe daje wff: stoga

´¬P´, ´¬Q´

jesu wffs. Ali ako je ´¬P´ wff, kao što smo to pokazali da jeste, tada po stavki *(b)* imamo da

´¬¬P´

jeste wff. (Mogli bismo nastaviti da primenjujemo *(b)* kako bismo pokazali da su ´¬¬¬P´, ´¬¬¬¬P´, itd., sve redom takođe wffs.) Pošto je sada pokazano da su ´¬¬P´ i ´Q´ wffs, pomoću

stavke *(d)* rezultat stavljanja ´&´ između njih i obuhvatanja zagradama te celine vodi sledećoj wff: odatle sledi da

(5) ´(¬¬P & Q)´

jeste wff. Ponovo pomoću *(c)*, samim tim što su ´P´ i ´Q´ wffs, onda je to i

´(P –> Q)´.

Koristeći *(e)*, uzimamo da su ´(P –> Q)´ i ´¬Q´ wffs, tada imamo da

(6) ´((P –> Q) v ¬Q)´

jeste wff. Konačno, koristeći *(f)*, kada je dato da su (6) i (5) wff, vidimo da je i (4) wff; zato što (4) proishodi iz zabeležene (6), koju sledi ´<–>´, koji sledi (5), a koja je u celini obuhvaćena u zagrade. Naša nam definicija omogućuje da pokažemo, korak po korak, počevši od najmanjih delova (varijabli), da složena formula, kao što je to (6), jeste dobro formirana. Pažljivo ispitivanje primera pojasnilo bi način na koji ta tehnika može biti generalno primenjena.

S druge strane, jasno je (mada nije tako jednostavno i dokazati) da nema takvih primera stavki od *(a)* do *(f)* koji bi ikako mogli da pokažu kako (1) gore - primer ´nerazumljive´ formule - jeste wff. Odatle, po stavci *(g)*, koja je isključujuća ili *ograničavajuća* (extremal) stavka definicije, (1) nije wff. Moć stavki *(a)-(g)*, uzetih zajedno, usmerena je na to da totalitet formula podeli u dva tabora: na one koje se mogu postići primenama stavki *(a)-(f)*, koje su wffs po definiciji, i one koje ne mogu biti postignute na taj način, koje s obzirom na *(g)* nisu wffs.

Značajan aspekt ove definicije jeste zalaganje, u stavkama *(c)-(f)*, na uvođenju obuhvatajućih *zagrada*. To je neophodno zbog dvosmislenosti koja bi bila rezultat njihovog ispuštanja. Na primer, ne želimo da dozvolimo ´P & Q –> R´ kao dobro obrazovanu formulu, zbog toga što ona, ovako kako stoji, može značiti ili ´(P & (Q –> R))´ (tako da izražava konjunkciju sa kondicionalom drugog konjunkta) ili ´((P & Q) –> R)´ (tako da izražava kondicional sa konjunkcijom na mestu antecedenta). Naše zalaganje na stavljanju zagrada tiče se ove vrste opasnosti. (S druge strane, takvo stavljanje zagrada nam nije potrebno u stavki *(b)*, a od koristi bi bilo da student razmotri i zašto nije.)

Međutim, na izvesne načine konvencije u vezi sa zagradama koje je pružila naša definicija wff, mada teorijski ispravne, opterećene su praktičnom neprijatnošću: zapravo, kao posledica ovih konvencija veliko mnoštvo formula prikazanih u Poglavlju 1 na žalost nije dobro formirano. Njima je nedostajao neophodan spoljašnji par zagrada. Na primer, tamo smo prihvatili '¬P —> Q', dok s obzirom na stavku *(c)* zahtevamo '(¬P —> Q)'. Ali naše prvobitno osećanje je imalo osnova i pored toga što nam je nedostajala preciznost: ljudska bića ne mogu podneti baš preveliko bujanje zagrada. Usvojiti prirodnu *praktičnu* konvenciju značilo bi dozvoliti odbacivanje krajnje zagrade, samim tim što je evidentno da to neće izazvati dvosmislenost. Pored toga, postoji još jedan praktičan način na koji ćemo se pouzdano osloboditi zagrada, a koji ćemo sada izložiti.

Poredajmo veznike u izvestan niz: saglasimo se sa tim da '¬' 'jače vezuje' nego '&' ili 'v', da '&' i 'v' 'jače vezuju' nego —>, a da —>' 'jače vezuje' nego '<—>'. Usled toga u praksi možemo pouzdano napisati 'P & Q —> R' umesto '((P & Q) —> R)', izostavljajući spoljašnje zagrade na osnovu prethodne konvencije, dok izostavljanje unutrašnjih možemo učiniti na osnovu ove sledeće: '&', pošto vezuje jače od '—>', više primiče 'Q' u 'P & Q —> R' drugom konjunktu nego što ga postavlja kao antecedent u 'Q —> R'. Ako nam je potrebna potonja interpretacija, treba da napišemo 'P & (Q —> R)'. Upotrebljavajući ove konvencije, (4) možemo pisati bez dvosmislenosti, u obliku koji je manje opterećen zagradama

(7) '(P —> Q) v ¬Q <—> ¬¬P & Q',

gde je neophodan samo jedan par zagrada. (S ovim u vezi, student bi trebalo da ima u vidu razliku između ¬¬(P & Q), dvostruko negirane konjunkcije, i ¬¬P & Q, koje je konjunkcija dvostruko negiranog P sa Q.)

Ove konvencije važiće kao usvojene od sada pa nadalje. Ali mora se naglasiti da su one pre praktični vodiči koji usmeravaju oko nego što su teorijska sredstva. U teoriji, wff ostaje takvom kakvom je gore određena, sa kompletnim spoljašnjim i unutrašnjim zagradama.

Do sada smo opisali osnovnu sintaksu iskaznog računa: definicija koja je data za wff može se prihvatiti kao dosledno shvatanje onoga što treba razumeti pod do sada važećim pojmom

rečenice date u simboličkom obliku; stavke *(a)-(f)* te definicije mogu se shvatiti kao ono što se obično opisuje kao *pravila formiranja* iskaznog računa - dakle, pravila koja određuju šta je odgovarajuće obrazovan jezički izraz.

Ali postoje i drugi sintaksički pojmovi koji će biti značajni kasnije a koje će biti korisno sada odrediti. Prvi od njih tiče se *dosega* veznika. Grubo govoreći, doseg veznika u izvesnoj formuli jeste formula povezana veznikom, zajedno sa veznikom samim i (teorijski) obuhvatajućim zagradama. Na primer, doseg ´&´ u (4) jeste wff ´(¬¬P & Q)´, a doseg ´<–>´ u (4) jeste sama wff (4): govoreći uopšteno, doseg bilo kojeg veznika jeste wff. Tačnije, potrebno nam je da odredimo doseg *događanja* veznika u izvesnoj wff: u (4) postoje tri događanja ´¬´; doseg prvog događanja (čitajući sleva na desno) jeste ´¬Q´, doseg drugog je ´¬¬P´, a doseg trećeg je ´¬P´. Doseg jeste ono što pojedinačno događanje veznika kontroliše. Tačna definicija dosega glasi ovako: *doseg* događanja veznika u wff jeste *najkraća wff u kojoj se to događanje pojavljuje*. Na primer, uzmimo (usamljeno događanje) ´v´ u (4): u okviru (4) ono se pojavljuje u takvim formulama kao što su:

(i) ´) v ¬´
(ii) ´ –> Q) v ¬Q)´
(iii) ´((P –> Q) v ¬Q)´
(iv) ´(((P –> Q) v ¬Q) <–> (¬¬´

Najkraća formula u kojoj se ono pojavljuje, a koja je takođe *dobro obrazovana* formula u odnosu na gornje stavke *(a)-(f)*, jeste (iii), a koja je zapravo i doseg događanja ´v´. Čak ako se definicija dosega i čini pomalo neodređenom, intuitivan sadržaj tog pojma bi trebalo da je očigledan.

Terminima dosega možemo odrediti drugi značajan sintakstički pojam, kada je neki veznik (tj. njegovo događanje) subordiniran (*podređen*, subordinate) u izvesnoj wff nekom drugom. Neki veznik (tj. njegovo događanje) je subordiniran drugom ako je *doseg prvog sadržan u dosegu ovog drugog*. Na primer, u (4) je znak ´–>´ subordiniran ´v´, a ´v´ i ´&´ su oba subordinirana ´<–>´. Prvo ´¬´ je subordinirano ´v´, ali ne i ´–>´; drugo ´¬´ je subordinirano ´&´, ali ne i ´v´; treće ´¬´ je subordinirano drugom ´¬´, a to je i ´&´ i ´<–>´, ali ne i ´–>´ ili ´v´.

U bilo kojoj wff postoji tačno jedan veznik sa najširim dosegom. Ovaj se naziva *glavni veznik* i njegov je doseg cela wff. Na primer, u (4) je glavni veznik '<->', a u (2) i (6) je to 'v'.

Kada primenom stavki *(b)-(f)* dokazujemo da je izvesna formula dobro uradena, neophodno nam je da polazimo od subordiniranih do podređujućih veznika. Stoga, u dokazivanju da je (4) dobro uređena, utvrđujemo da je '¬P' dobro uređena pre nego što dokažemo da je to i '¬¬P'; a da je to i '¬¬P' pre nego što dokažemo da je to i '(¬¬P & Q)'; i tako dalje - uvodeći na svakom koraku veznik koji subordinira ili čiji je doseg prethodno uvedeni veznik. Sa ove tačke gledišta, pojmovi dosega i podređivanja, kao i stavke *(a)-(f)*, predstavljaju načine razabiranja *prirodne strukture* wff.

Kada imamo jasnu predstavu o pojmu wff, u stanju smo da odmah odredimo *sekvent-izraz* (izraz koji izražava sekvent, u smislu iz prethodnog poglavlja). Kao i ranije, nazovimo '⊢' 'znak tvrđenja' i neka $A_1, A_2, ..., A_n$, B bude bilo koji skup wffs. Tada

$$A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$$

jeste sekvent-izraz. Drugim rečima, napiši bilo koji (konačan) broj wffs, sa zarezima među njima; dodaj sa desne strane znak tvrđenja i odmah iza njega dodaj bilo koju wff, rezultat je sekvent-izraz. U poslednjem poglavlju je bar za 36 sekvent-izraza dokazano da izražavaju validne sekvente, što odgovara dokazima označenim brojevima od 1 do 36.

Poslednja definicija uvodi zamisao koja je krajnje korisna u logici: to je zamisao o *metalogičkim varijablama*, kao što su 'A_1', 'A_n', 'B'. (One su se pojavile ranije, u Poglavlju 1, Odeljku 4, u stavu *Df.*<->.) *Iskazne* varijable, kao što su 'P', 'Q', imaju iskaze kao slučajeve; numeričke varijable u algebri, kao što su '*x*' i '*y*', imaju *brojeve* kao slučajeve. Ali metalogičke varijable su od pomoći kada želimo, kao što je to sada slučaj, da govorimo o samim *simbolima*, zato što oni kao slučajeve imaju *simbole*, ili nizove simbola. Kada kažem da su $A_1, A_2, ..., A_n$, wffs, to je potpuno analogno kazivanju, u algebri, da su x_1, x_2,..., x_n brojevi. U produžetku možemo ilustrovati korist od metalogičkih varijabli ponovnim obrazovanjem stavki *(a)-(f)* u novom obliku (ove verzije imaju smisao koji je usklađen sa prethodnim).

(a') bilo koja iskazna varijabla je wff;
(b') ako je A wff, onda je ¬A wff;
(c') ako su A i B wffs, onda je (A —> B) wff;
(d') ako su A i B wffs, onda je (A & B) wff;
(e') ako su A i B wffs, onda je (A v B) wff;
(f') ako su A i B wffs, onda je (A <—> B) wff.

V e z b a

Izaberi formule (recimo iz Poglavlja 1) i ispiši ih kao wffs. U svakom od slučajeva dokaži da su wffs, koristeći definiciju wff; utvrdi doseg svakog (događanja) veznika; utvrdi koji je glavni veznik, kao i relacije subordiniranosti koje važe između događanja veznika.

2 Teoreme i derivirana pravila

Sa sintakse iskaznog računa koju smo sada opisali, možemo se vratiti na prvo pitanje koje smo postavili u uvodu u ovo poglavlje: koja sredstva možemo razviti sa tom svrhom da, koristeći već dokazane sekvente, skratimo dokaze ostalih sekvenata? Jedno od glavnih sredstava biće uvođenje *teorema* u dokaze, tako da počinjemo sa objašnjenjem toga šta su one.

Kao što smo istakli u Poglavlju 1, dva od deset do sada uvedenih pravila derivacije - CP i RAA - imaju to svojstvo da kao ishod njihove primene u dokazu broj asumpcija označenih sa leve strane biva zamenjen samo sa jednom jedinom. Pretpostavi sada da pre primene nekog od ovih pravila postoji samo jedna asumpcija sa leve strane: tada kao rezultat ove primene neće postojati *nijedna* asumpcija sa leve strane. Ova je mogućnost skicirana u stavu koji sadrži data pravila; na primer, u Odeljku 5 poslednjeg poglavlja za RAA je rečeno da nam dozvoljava, u slučaju datog dokaza za B & ¬B iz A, da deriviramo ¬A na preostalim asumpcijama (*ako ih uopšte ima*). Ovo je jednostavan primer dokaza koji ima to svojstvo.

37	1	(1)	P & ¬P	A
		(2)	¬(P & ¬P)	1,1 RAA

U redu (1) pretpostavili smo kontradikciju P & ¬P (u pravilu o asumpcijama ništa nas ne sprečava da pretpostavimo šta god nas

je volja). Odatle sledi da red (1) tvrdi da kada je data kontradikcija - imamo kontradikciju. Na osnovu toga možemo da primenimo RAA da bismo uveli negaciju za (1), *ne zasnivajući to ni na jednoj asumpciji*. Na osnovu toga, u redu (2) ne postoji *nijedan* navod sa leve strane.

Vrlo jednostavno možemo ustanoviti sekvent koji je dokazan u redu (2) u 37.

37 ⊢ ¬(P & ¬P) ZAKON NEKONTRADIKCIJE

Ovde se znak tvrđenja pojavljuje sa leve strane bez ijedne wffs, što odgovara odsustvu navoda sa leve strane u redu (2). Konkluzije sekvenata koje možemo da dokažemo u ovom obliku zovemo *teoreme*; teorema je tako *konkluzija dokazivog sekventa u kojem je broj asumpcija jednak nuli*. Umesto toga da znak tvrđenja čitamo kao 'sledi', što je najprirodnije čitanje u slučaju kada sekventi imaju asumpcije, u slučaju sekventa koji je dokaziv bez ijedne od asumpcija možemo prirodno da ga čitamo kao 'teorema je da ...'. Prema tome, 37 utvrđuje da je teorema to da nije slučaj da P i ¬P: na primer, teorema je da nije slučaj da pada kiša i da ne pada kiša.

Većina značajnih teorema postignuto je zapravo primenom CP. Na primer:

38 ⊢ P –> P (uporedi sekvent 29) ZAKON IDENTITETA

1	(1)	P	A
	(2)	P –> P	1,1 CP

39 ⊢ P –> ¬¬P ZAKONI DVOSTRUKE NEGACIJE

1	(1)	P	A
1	(2)	¬¬P	1 DN
	(3)	P –> ¬¬P	1,2 CP

40 ⊢ ¬¬P –> P

1	(1)	¬¬P	A
1	(2)	P	1 DN
	(3)	¬¬P –> P	1,2 CP

41 ⊢ P & Q –> P (uporedi sekvent 14)

1	(1)	P & Q	A
1	(2)	P	1 &E
	(3)	P & Q –> P	1,2 CP

38 i 41, kada se uporede sa 29 i 14, sugerišu da se teorema može dobiti iz bilo kojeg sekventa koji je dokazan u poslednjem poglavlju prostim dodavanjem njegovom dokazu jednog ili više koraka CP. Na primer:

42 ⊢ (P –> Q) –> (¬Q –> ¬P)

1	(1)	P –> Q	A
2	(2)	¬Q	A
1,2	(3)	¬P	1,2 MTT
1	(4)	¬Q –> ¬P	2,3 CP
	(5)	(P –> Q) –> (¬Q –> ¬P)	1,4 CP

Ovde su redovi (1)-(4) istovetni sa dokazom sekventa 9, P –> Q ⊢ ¬Q –> ¬P, dok korak CP u redu (5) upotpunjuje dokaz 42. Slično tome, tri koraka CP koja su dodata dokazu sekventa 4, vode sledećem:

43 ⊢ (P –> (Q –> R)) –> ((P –> Q) –> (P –> R))

Značaj teorema počiva na činjenici da, time što su dokazive kao konkluzije koje ne počivaju *ni na jednoj* asumpciji, one su iskazi koji su *istiniti jednostavno na logičkim osnovama*. Takve istine, obično nazivane *logičke istine* ili *logički zakoni*, zauzimaju značajno mesto ne samo u logici već takođe i u filozofiji. Mnoge od njih dobile su posebna imena. Na primer, 37 se naziva *zakon nekontradikcije*, 38 se naziva *zakon identiteta*, 39 i 40 se ponekad naziva *zakon dvostruke negacije*. Kao primer za 38 možemo uzeti iskaz da ako pada kiša onda pada kiša; ovo je tačno na čisto logičkim osnovama, sasvim nezavisno od stvarnog stanja vremena.

Teoreme, takve kao P –> P, treba da budu upoređene sa odgovarajućim validnim sekventima sa asumpcijama, takvim kao P ⊢ P. Dok su ovi potonji argumenti-mreže, obrasci validnog argumenta, predašnji su (logički) *istiniti iskazi*. 'Pada kiša; prema tome, pada kiša' izražava argument za koji možemo pitati: da li je *validan* ili nije? 'Ako pada kiša onda pada kiša' izražava iskaz za koji možemo pitati: da li je *istinit* ili nije? Ne razlikovati argumente i iskaze analogno je nerazlikovanju validnosti i istine - što predstavlja zbrku koju sam pokušao da eliminišem u prvom odeljku ove knjige.

Postoji još jedna značajna teorema koja ne može biti dokazana nekim konačnim CP korakom, zato što po formi nije kondicional, a naziva se *zakon isključenja trećeg*.

44 ⊢ P v ¬P

1	(1)	¬(P v ¬P)	A
2	(2)	P	A
2	(3)	P v ¬P	2 vI
1,2	(4)	(P v ¬P) & ¬(P v ¬P)	3,1 &I
1	(5)	¬P	2,4 RAA
1	(6)	P v ¬P	5 vI
1	(7)	(P v ¬P) & ¬(P v ¬P)	6,1 &I
	(8)	¬¬(P v ¬P)	1,7 RAA
	(9)	P v ¬P	8 DN

U redu (1) smo pretpostavili negaciju tražene teoreme, a samim tim i kontradikciju kao željeni cilj. Pretpostavljajući P (red (2)) dobili smo kontradikciju (red (4)) koja počiva i na (1) i na (2), tako da (1) vodi (red (5)) ka ¬P. Ovo vodi istoj kontradikciji (red (7)), koja se sada, naime, zasniva samo na (1). Odatle, koristeći DN, dobijamo traženi rezultat. Nije bez značaja to što u redu (6) nalazimo P v ¬P koje počiva *na svojoj sopstvenoj negaciji* kao asumpciji - kada je dato da nešto nije slučaj, nešto jeste slučaj; ovo bi trebalo da baci izvesno svetlo na 'iznenađujući' rezultat 23 iz prethodnog poglavlja.

Zakon isključenja trećeg zapravo tvrdi da je za bilo koji iskaz ili on ili njegova negacija slučaj, što je dovoljno očigledna logička istina. Neposredno u vezi sa ovim zakonom jeste i to da je svaki iskaz ili istinit ili lažan, po čemu je ovaj zakon i dobio ime - treća ili srednja vrednost između istine i laži je isključena za sve iskaze. Što se logike tiče, ili pada kiša, ili ne pada kiša: nema treće mogućnosti. Da budemo sasvim iskreni, moglo bi se reći da može biti, a i bilo je, sumnji da li ovaj zakon ima univerzalnu primenu: na primer, da li je istina da ili ste prestali da tučete svoju ženu ili niste?

Dokaz koji je ovde iznet je dokaz teoreme P v ¬P. Međutim, pretpostavimo da želimo da dokažemo Q v ¬Q: za samo trenutak se možemo uveriti da, ako sistematski substituiramo svako događanje 'P' u datom dokazu sa 'Q', ishod će, u ovoj

drugoj teoremi, biti podjednako zasnovan. Pretpostavimo, opet, da želimo da dokažemo (Q –> R) v ¬(Q –> R); tek momenat više nam treba da se uverimo da će slična substitucija ´P´ za ´(Q –> R)´ obaviti u dokazu isti posao. Razmatranje takvih slučajeva sugeriše da mi, dokazujući teoremu, implicitno dokazujemo široku raznolikost drugih teorema koje su u bliskoj vezi sa dokazanom teoremom i to putem maločas predstavljene substitucije, tako da bi bilo rasipno gubiti vreme na dokazivanje već pronađenog dokaza. To nam pruža prečicu ka novim rezultatima.

Stvar se može učiniti preciznijom ako definišemo *slučaj substitucije* (substitution-instance) date wff, na sledeći način. Slučaj substitucije date wff *jeste wff koja proizilazi na osnovu date wff posredstvom substituiranja događanja jedne ili više varijabli u wff nekim sasvim drugim wffs*, što se shvata kao da je svaka ovako substituirana varijabla zapravo zamenjena *tom istom* wff. Na primer, ´(Q –> R) v ¬(Q –> R)´ je, po svojoj definiciji, slučaj substitucije ´P v ¬P´, zato što on proizilazi iz potonje wff putem substitucije varijable ´P´, koja se događa u ´P v ¬P´, posredstvom iste wff ´(Q –> R)´. Slično, ´Q v ¬Q´ je slučaj substitucije za ´P v ¬P´, a barem u ovom slučaju to važi i obrnuto.
Ovde je dat mnogo složeniji slučaj. Uzmimo da su wffs:

(1) P –> Q v ¬(¬P & Q);
(2) R v S –> P v ¬(¬(R v S) & P).

U ovom slučaju je (2) slučaj substitucije (1), zato što (2) proizilazi iz (1) na osnovu substitucije varijable ´P´, umesto dva događanja u (1), pomoću ´(R v S)´, kao i varijable ´Q´, umesto dva događanja u (1), pomoću ´P´.

Važno je naglasiti dva svojstva substitucije koja se lako i često zaboravljaju. Prvo, substitucija mora biti učinjena *jednoobrazno* - tj. dosledno - za svaku od substituiranih varijabli: da bismo uopšte izvršili slučaj substitucije, *svako* od događanja neke date varijable koja se substituira mora biti svuda substituirano *istom* wff. Drugo, substitucija se može izvršiti samo na *iskaznim varijablama*, a *ne*, na primer, na negiranim varijablama. Odatle sledi da

(3) ¬S –> Q v ¬(S & Q)

po našoj definiciji nije slučaj substitucije (1), mada

(4) ¬S –> Q v ¬(¬¬S & Q)

jeste slučaj substitucije (1); ako dosledno substituiramo ´P´ u (1) pomoću ´¬S´, dobijamo (4) a ne (3). Slučaj substitucije će uvek biti barem toliko dugačak koliko to zahteva data wff, a prilikom slučaja substitucije nijedan od veznika u datoj wff ne nestaje. U očiglednom, mada donekle neodređenom smislu, slučaj substitucije ima strukturu onolikog obima kolikog je obima i njen original.

Sada možemo reći da dokaz teorema obrazuje implicitan dokaz svih (neograničeno mnogo) mogućih slučajeva substitucije te teoreme. Dokaz P –> P (iz 38 gore) implicitan je dokaz bilo koje teoreme oblika A –> A, za bilo koju wff A, a isto tako i implicitno dokaz za (¬P –> Q) –> (¬P –> Q), R v S –> R v S, i tako dalje. Određenije rečeno, pretpostavimo da wff A izražava teoremu za koju imamo dokaz i pretpostavimo da je B neka varijabla koja se događa u A. Tada, ako sistematski substituiramo B u celom dokazu A pomoću neke druge wff C, dobijamo nov dokaz tog slučaja substitucije A koji proizilazi iz substitucije B u celoj A pomoću C. Ovo na odgovarajući način može biti prošireno i na slučajeve substitucije kada je u pitanju broj varijabli u A koji je veći od jedan. Da je novi dokaz zaista dokaz - a da sve primene pravila derivacije ostaju korektne primene i nakon što je izvršena substitucija - to se može videti i ispitivanjem samih pravila: zato što se pravila odnose samo na obim strukture wffs, ova struktura substitucijom ostaje nenarušena.

Naš rezultat možemo sumirati u sledećem obliku:

(S1) Za bilo koji slučaj substitucije dokazane teoreme može se pronaći dokaz.

Ovaj rezultat koji se odnosi na teoreme može se proširiti i na sekvente u celini. Možemo odrediti *slučaj substitucije sekvent-izraza*, kao *bilo koji sekvent-izraz koji proizilazi iz datog sekvent-izraza pomoću substitucije jedne ili više varijabli koje se događaju u nekoj wff u sekvent-izrazu dosledno tokom celog sekvent-izraza pomoću nekih drugih wffs*, što treba shvatiti tako što svaka od tako substituiranih varijabli biva substituirana *istom* wff. (Ova definicija zapravo postaje ranija definicija za granični slučaj kada sekvent-izraz sadrži samo jednu wff.) Na primer, sekvent 2 je slučaj substitucije sekventa 1, pa je

(5) P –> (Q & R –> ¬S), P, ¬¬S ⊢ ¬(Q & R)

slučaj substitucije za

(6) P –> (Q –> R), P, ¬R ⊢ ¬Q,

koji je dobijen doslednom substitucijom ´(Q & R)´ za ´Q´, a ´¬S´ za ´R´. Dokazali smo da (6) izražava validni sekvent što je pokazano u dokazu 6. Sada vidimo da dokaz za 6 takođe obrazuje implicitan dokaz i za sekvent-izraz (5). Pomoću sasvim sličnog rasuđivanja, dobijamo generalizaciju načela (S1):

(S2) Za bilo koji slučaj substitucije dokazanog sekventa može se pronaći dokaz.

Dokaz je ustvari postignut sistematskim izvođenjem relevantnih zamena dosledno tokom celog datog dokaza, nakon čega sve primene pravila derivacije ostaju ispravno primenjene i u novom dokazu.

Načela (S1) i (S2) ukazuju nam na značajno svojstvo naših dokaznih rezultata, odnosno na njihovu *opštost*. Na početku smo uveli simbole ´P´, ´Q´, ´R´, itd., kao ono što stoji za *pojedinačne* rečenice običnog jezika, a čiji značaj je u tome što su od pomoći kada treba ukazati na logičku formu složenih rečenica -formu koja je zajednička svim ostalim rečenicama. Sada možemo videti da one zapravo zaslužuju oznaku ´varijabla´, zbog toga što je teorema ili sekvent koji je dokazan za P implicitno dokazan i za *bilo koji* iskaz koji pripada iskaznom računu, kao što i u algebri rezultat koji sadrži ´*x*´ jeste implicitno rezultat koji govori o bilo kojem broju. Na taj način, naši se rezultati, mada su utvrđeni za pojedinačne iskaze, odnose na bilo koji iskaz koji može biti izražen u našem načinu beleženja i po sadržaju su sasvim opšti.

Prednost koju nam pružaju teoreme i njihovi slučajevi substitucije možemo iskoristiti da bismo shvatili dokaze pomoću *pravila uvođenja teoreme* (TI) (the rule of theorem introduction). Ovo pravilo nam dozvoljava da uvedemo, na bilo kojem stupnju dokaza, teoremu koja je već dokazana ili slučaj substitucije takve teoreme. Sa desne strane navodimo TI (ili TI(S), ako je uveden slučaj substitucije) zajedno sa brojem dokazane teoreme. Sa leve strane, naravno, ne pojavljuje se nijedan broj, zato što se teorema ne zasniva ni na jednoj asumpciji. Na primer:

45 P ⊢ (P & Q) v (P & ¬Q)

1	(1)	P	A
	(2)	Q v ¬Q	TI(S) 44 P v ¬P
3	(3)	Q	A
1,3	(4)	P & Q	1,3 &I
1,3	(5)	(P & Q) v (P & ¬Q)	4 vI
6	(6)	¬Q	A
1,6	(7)	P & ¬Q	1,6 &I
1,6	(8)	(P & Q) v (P & ¬Q)	7 vI
1	(9)	(P & Q) v (P & ¬Q)	2,3,5,6,8 vE

Nakon pretpostavljanja P, uvodimo (u redu (2)) zakon isključenja trećeg, 44, kao slučaj substitucije i tada postupamo pomoću vE, pretpostavljajući redom svaki disjunkt ovog zakona (redovi (3) i (6)) i dobijamo, na osnovu svakoga od njih, konkluzija (redovi (5) i (8)). Kada primenjujemo vE u redu (9), konkluzija počiva jedino na P, zato što disjunkcija u (2), budući da je teorema, ne počiva ninajednoj asumpciji.

46 P –> Q ⊢ P & Q <–> P

1	(1)	P –> Q	A
	(2)	P & Q –> P	TI 41
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 MPP
1,3	(5)	P & Q	3,4 &I
1	(6)	P –> P & Q	3,5 CP
1	(7)	(P & Q –> P) & (P –> P & Q)	2,6 &I
	(8)	P & Q <–> P	7 Df.<–>

Da bismo dobili bikondicional P & Q <–> P, usredsredujemo se na svaki od dva kondicionala posebno, P & Q –> P i P –> P & Q; ali ovaj prvi je dokazana teorema, 41, pa ga u ovom slučaju uvodimo direktno putem TI. Pridodajući 27 i 46, dobijamo medusobno izvodiv rezultat

47 P & Q <–> P ⊣⊢ P –> Q

Pravilo TI *nije* novo temeljno pravilo derivacije: ono nam ne omogućuje da dokažemo sekvente koje inače ne bismo mogli dokazati primenama naših osnovnih deset pravila; ono nam samo omogućuje da dokažemo rezultate na *mnogo kraći način* tako što koristimo rezultate koji su već dokazani. Na primer, u

slučaju 45 bismo mogli preuzeti dati dokaz od 8 redova, koji je podudaran sa prvih osam redova iz dokaza 44, ali sa 'Q' namesto 'P', a zatim nastaviti kao što smo počeli, zamenivši brojeve od (1) do (9) sa brojevima od (9) do (17). Umesto TI(S) 44, sa desne strane u ovom redu bilo bi 8 DN (uporedi red (9) iz 44) i na taj način dobijamo potpun, mada nešto duži, dokaz iz naših osnovnih pravila. Kada je teorema uvedena pomoću TI, možemo prethodno napisati dati dokaz pomoću osnovnih pravila kojima smo dobili dokaz te teoreme i tako transformisati dokaz u dokaz koji je duži i zasnovan na prvobitnim načelima: jedino što je neophodno jeste izvesno ponovno brojanje redova. Pravila koja imaju ovo svojstvo, a koja pospešuju naše tehnike dokazivanja, ali za koje se može pokazati da ipak ne povećavaju bitno samu moć derivacije, zovu se *derivirana pravila*, nasuprot naših deset osnovnih pravila, koja možemo zvati *prvobitna pravila*.

Imajući u vidu ovu upotrebu teorema koja čini dokaze kraćim, prirodno je da se zapitamo da li će nam neko analogno pravilo omogućiti da na isti način koristimo i dokazane sekvente. Na primer, pretpostavimo da smo dokazali, na osnovu izvesnih asumpcija, da P –> Q. Tada, na osnovu sekventa 9 (P –> Q ⊢ ¬Q –> ¬P), bili bismo u stanju da zaključimo, bez nekog posebnog dokaza, ¬Q –> ¬P na osnovu istih asumpcija. Ili, pretpostavimo da smo dokazali, na osnovu različitih asumpcija, P –> Q, Q –> R i P. Tada na osnovu sekventa 3 (P –> Q, Q –> R, P ⊢ R), bili bismo u stanju da zaključimo R, bez posebnog dokaza, na osnovu uloga koji nam ove asumpcije obezbeđuju. Ovo bi trebalo da primenjujemo ne samo u slučajevima već dokazanih sekvenata, već takođe i onda kada se radi o bilo kojem njihovom slučaju substitucije i to s obzirom na (S2).

Pravilo uvođenja sekventa (SI) (the rule of sequent introduction), takođe derivirano a ne prvobitno pravilo, omogućuje nam da učinimo upravo to. Donekle ga je složenije i zasnovati i opravdati u punoj opštosti, ali njegova osnovna funkcija bila bi jasna iz sledećih primera. Pretpostavimo da kao konkluzije dokaza imamo A_1, A_2,..., A_n, koje počivaju na različitim asumpcijama, i pretpostavimo da je A_1, A_2,..., A_n ⊢ B sekvent (koji je slučaj substitucije) za koji već imamo dokaz; tada nam SI dozvoljava da izvedemo B kao konkluziju na osnovu uloga onih asumpcija na kojima počivaju A_1, A_2,..., A_n. SI se može

opravdati na sledeći način. Po hipotezi (i (S2) ukoliko je to neophodno), imamo dokaz, koji koristi samo prvobitna pravila, za

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$.

Odatle, pomoću *n* sukcesivnih koraka CP koji su dadati dokazu, kao teoremu možemo dokazati

(ii) $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots))$

(teoremu kondicionala koja odgovara tom sekventu i to na isti način na koji je i konkluzija iz 43 gore odgovarajuća u odnosu na 4). Odatle, pomoću TI možemo u dati dokaz uvesti (ii) sa konkluzijama $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kao novi red koji ne počiva ni na jednoj asumpciji. Sada, pomoću *n* sukcesivnih koraka MPP, koristeći dalje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kao antecedente datih kondicionala, možemo izvesti B kao konkluziju. Jasno je da će B biti zasnovano na onim iskazima, kao asumpcijama, na kojima se zasniva i svako od $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ovo opravdava upotrebu SI, u tom smislu što se pokazuje kako bilo koji dokaz koji koristi SI može biti sistematski transformisan u dokaz tog istog sekventa koji koristi samo prvobitna pravila - korak u kojem je uveden TI, s obzirom da stoji namesto ovih pravila, kao što već znamo, može se eliminisati.

48 $\neg P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$

1	(1)	$\neg P \vee Q$	A
1	(2)	$\neg(\neg\neg P \,\&\, \neg Q)$	1 SI(S) 36(a)
1	(3)	$\neg\neg P \rightarrow Q$	2 SI(S) 35(b)
4	(4)	P	A
4	(5)	$\neg\neg P$	4 DN
1,4	(6)	Q	3,5 MPP
1	(7)	$P \rightarrow Q$	4,6 CP

Slučaj substitucije 36(a) je $\neg P \vee Q \vdash \neg(\neg\neg P \,\&\, \neg Q)$, a slučaj substitucije 35(b) je $\neg(\neg\neg P \,\&\, \neg Q) \vdash \neg\neg P \rightarrow Q$: ova dva sekventa su upotrebljena da se dobije (2) iz (1) i (3) iz (2) pomoću SI. Ostatak dokaza je tada očigledan. Zajedno sa Vežbom 1.5.1(i), 48 daje

49 $P \rightarrow Q \dashv\vdash \neg P \vee Q$.

PARADOKSI MATERIJALNE IMPLIKACIJE

50 P ⊢ Q -> P

1	(1)	P	A
1	(2)	¬Q v P	1 vI
1	(3)	Q -> P	2 SI(S) 48

51 ¬P ⊢ P -> Q

1	(1)	¬P	A
1	(2)	¬P v Q	1 vI
1	(3)	P -> Q	2 SI 48

52 ¬P, P v Q ⊢ Q

1	(1)	¬P	A
2	(2)	P v Q	A
3	(3)	P	A
1	(4)	P -> Q	1 SI 51
1,3	(5)	Q	3,4 MPP
6	(6)	Q	A
1,2	(7)	Q	2,3,5,6,6 vE

53 ¬Q, P v Q ⊢ P

(Dokaz je sličan sa dokazom iz 52.)

54 ⊢ (P -> Q) v (Q -> P)

	(1)	P v ¬P	TI 44
2	(2)	P	A
2	(3)	Q -> P	2 SI 50
2	(4)	(P -> Q) v (Q -> P)	3 vI
5	(5)	¬P	A
5	(6)	P -> Q	5 SI 51
5	(7)	(P -> Q) v (Q -> P)	6 vI
	(8)	(P -> Q) v (Q -> P)	1,2,4,5,7 vE

Zanimljivo svojstvo ove poslednje serije rezultata je njihova progresivna priroda: kada je 48 već jednom dokazan, on je upotrebljen da bi se dobilo 50 i 51, koji su u nastavku bili upotrebljeni u dokazima 52 i 54. Trebalo bi da je od sada očigledno da su TI i SI moćna sredstva za dobijanje novih teorema i sekvenata na osnovu starih. Naš rad sada ima progresivan karakter matematičke teorije kakav ima i euklidovska geometrija.

U okviru poslednjih rezultata, 50 i 51 se ponekad nazivaju *paradoksima materijalne implikacije*. Da bismo osetili njihovu

paradoksalnu nit, imaćemo u vidu da Q u 50 i 51 može biti *bilo koji* iskaz, čak i onaj koji je sasvim različit po sadržaju s obzirom na P. Tako nam 50 omogućuje da, iz činjenice da je Napoleon bio Francuz, zaključimo da, ako je mesec plav onda je Napoleon bio Francuz; dok nam 51 omogućuje da, iz činjenice da Napoleon nije bio Kinez, zaključimo da, ako je Napoleon bio Kinez onda je mesec plav. Naziv ´materijalna implikacija´ dao je Bertrand Russell za relaciju između P i Q koja je u našem simbolizmu izražena pomoću ´P —> Q´; to smo čitali kao ´ako P onda Q´, ali iz 50 i 51 je jasno da ´—>´ ima logičko svojstvo koje obično ne bi trebalo da poistovećujemo sa ´ako...onda...´. Ova diskrepancija je izvedena na osnovu činjenice da bi, pre nego što bismo obično prihvatili ´ako P onda Q´ kao istinite, trebalo da zahtevamo da P i Q budu povezani po smislu ili sadržaju, dok, kao što to pokazuju 50 i 51, nikakav takav zahtev nije propisan za prihvatanje ´P —> Q´. Medutim i pored priznavanja da takva razlika postoji, možemo pouzdano nastaviti da ´P —> Q´ usvajamo kao da iskazuje ´ako P onda Q´ s obzirom da je to *pogodno sredstvo u svrhe rasuđivanja*, zato što naša pravila imaju barem to svojstvo, o čemu će biti reči u Odeljku 4, da nas nikada neće zavesti ka lažnoj konkluziji ako polazimo od istinitih asumpcija. Onaj čitalac koji nije sklon tome da prihvati da je 50 i 51 validno, primoran je ili da svoj sud zadrži za sebe dok ova činjenica ne bude utvrdena ili da tačno pokaže koji je to korak pogrešan i za koje to pravilo derivacije misli da nije pouzdano i zašto misli da nije. (Prirodan odgovor je da korak vI u redu (2) svakog od dokaza nije osnovan; ali uporedi opravdanje za vI u Poglavlju 1, Odeljak 3. Bilo kako bilo, 50 i 51 se mogu dokazati samo uz upotrebu pravila A, &I, &E, RAA, DN i CP, u svakom od slučajeva u devet redova; uputno je za vežbu otkriti ove ´nezavisne´ dokaze, zato što oni pružaju uvid u to kako je teško ´umaći´ paradoksima.) Prema tome, zajedno sa 23, možemo i 50 i 51 svrstati u posledice naših prvobitnih pravila, a koje predstavljaju veća iznenađenja. 54 je manje poznati paradoks: on tvrdi kao logičku istinu to da za bilo koji iskaz P i Q, ili je slučaj da ako P onda Q, ili je slučaj da ako Q onda P. Ili ako pada kiša pada sneg ili ako pada sneg pada kiša.

Načelo rasuđivanja koje je u vezi sa 52 i 53 ima srednjovekovni naziv *modus tollendo ponens*. To je četvrti srednjovekovni

modus koji sam spomenuo a u isto vreme poslednji, tako da ih na ovome mestu možemo izložiti sve zajedno.

(i) *Modus ponendo ponens* je načelo koje kaže da, ako važi kondicional i takođe njegov antecedent, onda važi i konsekvent;

(ii) *Modus tolledno tollens* je načelo koje kaže da, ako kondicional važi i takođe negacija njegovog konsekventa, onda važi i njegov antecedent;

(iii) *Modus ponendo tollens* je načelo koje kaže da, ako važi negacija konjunkcije i takođe jedan od njenih konjunkata, tada važi i negacija njenog drugog konjunkta;

(iv) *Modus tollendo ponens* je načelo da, ako važi disjunkcija i takođe negacija jednog od njenih disjunkata, tada važi i drugi disjunkt.

(i) i (ii) su bili uključeni u naša prvobitna pravila MPP i MTT. S obzirom na SI kao i 52 i 53, jasno je da se može derivirati pravilo koje je analogno sa *modus tollendo ponensom*, koje bismo nazvali MTP; kao *derivirano* pravilo, ono će biti tek poseban slučaj SI. Ono glasi ovako: ako je data disjunkcija i negacija jednog disjunkta, onda nam je dozvoljeno da deriviramo drugi disjunkt kao konkluziju. Kada to bude potrebno, ovo pravilo će zapravo biti navedeno kao MTP. Slično, s obzirom na SI i 34, kao i već dokazano Q, ¬(P & Q) ⊢ ¬P možemo formulisati kao posebno derivirano pravilo, MPT: ako je data negacija konjunkcije i jedan od njenih konjunkata, tada nam je dozvoljeno da deriviramo negaciju drugog konjunkta kao konkluziju.

U vezi sa *modi*, nije naodmet reći na kraju i to da nije neophodno da MTT bude dato kao prvobitno pravilo, već ono može biti dobijeno iz drugih kao derivirano pravilo. Odatle sledi:

55 P –> Q, ¬Q ⊢ ¬P

1	(1)	P –> Q	A
2	(2)	¬Q	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 MPP
1,2,3	(5)	Q & ¬Q	2,4 &I
1,2	(6)	¬P	3,5 RAA

55 dokazujemo bez upotrebe MTT. S obzirom na SI, 55 može

biti upotrebljeno da pruži derivirano pravilo čiji je ishod potpuno istovetan sa MTT. Veoma je važno ako smo se trudili da svedemo naša prvobitna pravila na što je moguće manji broj - što je posebno značajno u izvesnim oblastima logike.

Nezavisno od posebnih slučajeva MTP i MPT, najizdašniji sekventi za korišćenje SI jesu različiti oblici *de Morganovih zakona*, kako se već nazivaju, odnosno 36 i Vežbe 1.5.1(f)-(h), koji nam omogućuju da transformišemo negirane konjunkcije i disjunkcije u odgovarajuće ne-negirane disjunkcije, odnosno konjunkcije. Takođe je vredno pamtiti 49 (koje nam omogućuje da kondicionale promenimo u disjunkcije) 35 (koje nam omogućuje da kondicionale promenimo u negirane konjunkcije), Vežbu 1.5.1(e) (koja nam omogućuje da konjunkcije promenimo u negirane kondicionale) i Vežbe 1.5.1(c) i (d) (takozvane *zakone distribucije*). Takođe je često od pomoći uvesti 44 i nadalje postupati pomoću vE, kao u dokazu 54. Trebalo bi isto tako imati na umu i lukavstvo korišćenja paradoksa 50 i 51 iz tog istog dokaza.

V e ž b e

1 Koristeći se samo sa 10 prvobitnih pravila, dokaži sledeće sekvente:

(a) $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
(b) $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P \,\&\, Q)$
(c) $\vdash (P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$
(d) $\vdash (P \rightarrow Q \,\&\, \neg Q) \rightarrow \neg P$
(e) $\vdash (\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$

2 Sledeći sekventi su validni, zato što su slučajevi substitucije sekvenata koji su ovde u knjizi već dokazani. Za svaki od njih pomoću broja navedi dokazan sekvent koji je slučaj substitucije kao i to koja od substitucija je bila upotrebljena:

(a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow P, P \rightarrow Q \vdash P$
(b) $\neg\neg P \rightarrow \neg\neg\neg P, \neg\neg\neg\neg P \vdash \neg P$
(c) $\neg P \,\&\, (Q \,\&\, R) \rightarrow Q \vee P \vdash \neg P \rightarrow (Q \,\&\, R \rightarrow Q \vee P)$
(d) $(\neg Q \rightarrow Q) \rightarrow \neg(\neg Q \rightarrow Q) \vdash \neg(\neg Q \rightarrow Q)$
(e) $\neg(S \vee P) \vdash S \vee P \rightarrow (P \,\&\, Q \leftrightarrow R \vee \neg S)$

3 Dokaži samo pomoću prvobitnih pravila:

(a) $\vdash P \rightarrow P \vee Q$

Koristeći ovaj rezultat, dokaži pomoću prvobitnih pravila i TI:

(b) $Q \rightarrow P \vdash P \vee Q \leftrightarrow P$

S obzirom na vežbu 1.4.1(c) ovo daje:

(c) $P \vee Q \leftrightarrow P \dashv\vdash Q \rightarrow P$

4 Dokaži, koristeći prvobitna pravila i SI u vezi sa 50:

(a) $P \,\&\, Q \dashv\vdash P \,\&\, (P \leftrightarrow Q)$

5 Koristeći prvobitna ili derivirana pravila, zajedno sa bilo kojim od sekvenata ili teorema koje su već dokazane, dokaži:

(a) $\vdash P \vee (P \rightarrow Q)$
(b) $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$
(c) $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
(d) $\neg Q \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
(e) $P, \neg P \vdash Q$
(f) $P \vee Q \dashv\vdash \neg P \rightarrow Q$ (cf. Vežba 1.5.1(j))
(g) $\neg(P \rightarrow Q) \dashv\vdash P \,\&\, \neg Q$
(h) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \dashv\vdash P \vee Q$
(i) $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \dashv\vdash P \rightarrow Q \vee R$
(j) $P \rightarrow Q \dashv\vdash (P \leftrightarrow Q) \vee Q$
(k) $Q \vdash P \,\&\, Q \leftrightarrow P$
(l) $\neg Q \vdash P \vee Q \leftrightarrow P$

6 Neka A i B budu bilo koji iskazi koje je moguće izraziti načinom beleženja iskaznog računa.

(i) Pokaži da se $A \vdash B$ može dokazati pomoću naših pravila ako i samo ako se može dokazati $\vdash A \rightarrow B$;
(ii) Pokaži da se $A \dashv\vdash B$ može dokazati ako i samo ako se može dokazati $\vdash A \leftrightarrow B$.

7 Naše pravilo DN je zapravo obrazovano spajanjem dva pravila: (i) da bi se iz A deriviralo $\neg\neg A$ i (ii) da bi se iz $\neg\neg A$ deriviralo A. Pokaži da (i) može biti dobijeno kao derivirano pravilo iz ostalih prvobitnih pravila (uporedi odgovarajući prikaz pravila MTT, sekvent 55).

3 Istinosne tablice

Prethodni odeljak je dao odgovor na prvo pitanje koje smo postavili na početku ovog poglavlja. Da bismo pomogli da se odgovori na preostala dva pitanja (Da li su naša pravila derivacije pouzdana? Da li su kompletna?), u ovom odeljku prilazimo iskaznom računu na sasvim nov način, pomoću tehnike *istinosnih tablica* (truth-tables). Ova će nam tehnika uzgred pružiti takođe i metod pokazivanja *invalidnosti* (invalidity) sekvenata, s obzirom na to da sama pravila derivacije pokazuju jedino njihovu validnost. Istinosnim tablicama je lako vladati, tako da će naše razmatranje biti izloženo samo ukratko.

Metod istinosnih tablica jeste metod za *vrednovanje* (evaluating) wffs: pripisujemo vrednosti (koje nazivamo *istinosne vrednosti*) varijablama iz wff i nastavljamo posredstvom datih tablica da izračunavamo vrednost cele wff. Korisno bi bilo uporediti odgovarajuću matematičku proceduru za vrednovanje algebarskih izraza, recimo, na primer,

(1) $(x + y)z - (y + z)(y + x)$.

Pripišimo vrednost 10 za x, 3 za y i 5 za z. Pomoću substitucije dobijamo

(2) (10 + 3)5 - (3 + 5)(3 + 10).

Izračunavanje datih tablica proishodi sledećim redosledom koraka

(3) 13 x 5 - 8 x 13

(4) 65 - 104;

(5) -39.

Rezultat dobijen u (5) jeste vrednost celog izraza (1) kada je u pitanju pripisivanje vrednosti za varijable x=10, y=3, z=5.

U slučaju wffs iskaznog računa postoje samo dve moguće vrednosti koje varijable mogu da dobiju, *istinito* i *lažno* (the true and the false), a koje saobrazno tome označavamo sa 'T' i 'F'. Naša pretpostavka da postoje samo dve vrednosti zapravo je pretpostavka da svaki iskaz jeste ili istinit ili lažan, što odgovara zakonu isključenja trećeg (teorema 44). Ove dve vrednosti se zovu *istinosne vrednosti*

Da bismo izračunali istinosnu vrednost cele wff za dato pripisivanje istinosnih vrednosti njenim varijablama, neophodne su nam tablice (zvane *matrice*) za svaki logički veznik da bi se pokazalo kako je vrednost složene formule uslovljena vrednostima njenih delova; matrice se mogu porediti sa tablicama množenja i sabiranja, s tom razlikom što, zato što postoje samo dve utvrđene vrednosti, one mogu biti date *in toto*, dok matematičke tablice mogu biti date samo delimično (recimo, na pr. tablica množenja samo *do* 12). Matrice su sledeće:

A	¬A
T	F
F	T

	A —> B	B: T	B: F
A	T	T	F
	F	T	T

	A & B	B: T	B: F
A	T	T	F
	F	F	F

	A v B	B: T	B: F
A	T	T	T
	F	T	F

	A <—> B	B: T	B: F
A	T	T	F
	F	F	T

Matrica za ´¬´ motivisana je mišljenjem da negacija istinitog iskaza jeste laž, a negacija lažnog iskaza jeste istina. Matrica za ´&´ je motivisana shvatanjem da je konjunkcija A & B istinita ako su i A i B istiniti, a u ostalim slučajevima lažna. Matrica za ´v´ motivisana je shvatanjem da disjunkcija A v B jeste istinita ako bar jedno od A ili B jeste istinito, dok je za drugačije slučajeve lažna. Matrice za ´—>´ i ´<—>´ imaju osobenosti i njihovu motivaciju ćemo utvrditi nešto kasnije.

Da bismo ilustrovali upotrebu ovih matrica, pokušajmo da vrednujemo wff

(6) (P —> Q) v ¬Q <—> ¬¬P & Q

za pripisane vrednosti P=T, Q=F. Substitucija daje

(7) (T —> F) v ¬F <—> ¬¬T & F,

a izračunavanje pomoću matrica daje redom sledeće

(8) F v T <—> ¬F & F,
(9) T <—> T & F,
(10) T <—> F;
(11) F.

Prema tome cela wff dobija vrednost F za dato pripisivanje. Po konvenciji možemo svesti izradu na jedan red izračunavanja koje ćemo izvršiti ispod wff, odakle sledi:

P	Q	(P	–>	Q)	v	¬Q	<–>	¬¬P	&	Q
T	F	T	F	F	T	TF	F	TFT	F	F

Sa leve strane navodimo varijable iz wff a ispod njih potpisujemo pripisivanja koja se na njih odnose. Tada prevodimo vrednost svake varijable za svako od njenih događanja u wff i računamo korak po korak vrednost wff kao celine. Treba imati u vidu da ovi koraci odgovaraju odnosima podređivanja među veznicima (u smislu iz Odeljka 1): očigledno je da nam je neophodno da izračunamo vrednost onog veznika koji ga podređuje. Konačno, vrednost same wff pojavljuje se ispod glavnog veznika - u ovom slučaju je to '<–>'.

Provera pomoću istinosnih tablica (a truth-table test) neke wff jeste evaluacija (vrednovanje) te wff za *svako moguće* pripisivanje istinosnih vrednosti njenim varijablama. Ako wff ima samo jednu varijablu, recimo 'P', tada postoje dva moguća pripisivanja, P=T i P=F. Ako wff ima dve varijable, recimo P i Q, tada postoje četiri moguća pripisivanja: (i) P=T, Q=T; (ii) P=T, Q=F; (iii) P=F, Q=T; (iv) P=F, Q=F. Gledano u celini, ako wff ima *n* varijabli, broj mogućih pripisivanja će biti 2^n.

Možemo izložiti istinosno-tabličnu proveru wff tako što ćemo izvršiti evaluaciju za svako pripisivanje u zasebnom redu ispod wff. Na primer:

P	Q	(P	–>	Q)	v	Q	<–>	¬¬P	&	Q
T	T	T	T	T	T	FT	T	TFT	T	T
T	F	T	F	F	T	TF	F	TFT	F	F
F	T	F	T	T	T	FT	F	FTF	F	T
F	F	F	T	F	T	TF	F	FTF	F	F

(Drugi red ove provere je, naravno, istovetan sa redom izračunatim ranije za istu wff.) Kada je provera data u ovome obliku tada su vrednosti cele wff pokazane u koloni ispod glavnog veznika, koju možemo zvati *glavna kolona*.

Na osnovu ovih opaski student može brže naučiti kako da sam za sebe izvrši istinosno-tabličnu proveru, a moguće je da će

uspeti da dođe i do nekih sopstvenih prečica (na primer, ´¬¬´ se može zaobići gde god da se događa). Korisno je imati standardni poredak različitih mogućih pripisivanja varijablama. Standardni poredak za dve varijable prikazan je u sledećoj proveri, dok analogne standardne poretke za pripisivanje sa četiri ili više varijabli ostavljamo kao zadatak samom čitaocu.

P	Q	R	(P	&	¬Q)	v	R	–>	(R	&	¬Q	–>	¬P)
T	T	T	T	F	FT	T	T	T	T	F	FT	T	FT
T	T	F	T	F	FT	F	F	T	F	F	FT	T	FT
T	F	T	T	T	TF	T	T	F	T	T	TF	F	FT
T	F	F	T	T	TF	T	F	T	F	F	TF	T	FT
F	T	T	F	F	FT	T	T	T	T	F	FT	T	TF
F	T	F	F	F	FT	F	F	T	F	F	FT	T	TF
F	F	T	F	F	TF	T	T	T	T	T	TF	T	TF
F	F	F	F	F	TF	F	F	T	F	F	TF	T	TF

Za wffs koje sadrže četiri varijable potrebno je 16 redova; u slučaju pet varijabli, trideset i dva reda; i tako dalje. Zbog toga stvarno izvođenje istinosno tablične provere postaje sve nepraktičnije što je veći broj varijabli. Uprkos tome, važno je imati u vidu da, za *bilo koji* broj varijabli, proveravanje putem istinosnih tablica jeste u potpunosti mehanička procedura. Da bi se izvršila istinosno-tablična provera mogu se koristiti, a u suštini se i koriste, mašine (u ovoj vrsti posla se one pokazuju boljim od ljudskih bića). Na ovom mestu istinosno-tablična provera stoji nasuprot opštoj proveri: dok za logiku kao celinu postoji mehanička procedura za obrazovanje dokaza, ne postoji nijedna takva za obrazovanje opovrgavanja, te stoga nijedan postupak za proveravanje svih rečenica[3].

Idući sada za motivacijom kojom smo vođeni pri obrazovanju matrica za ´–>´ i ´<–>´, beležimo da, s obzirom na sekvent 49, P –> Q i ¬P v Q jesu međusobno izvodivi. Prema tome, po prirodi stvari možemo očekivati da će one imati iste vrednosti za ista pripisivanja njihovim varijablama. Ako istinosno-tablično proverimo ´¬P v Q´, dobijamo

[3] Zapravo, kada se pogledaju rezultati iz Odeljka 5 ovoga poglavlja, proizilazi da se na nivou iskaznog računa opovrgavanja *mogu* otkriti mehaničkom procedurom. Ali poznato je da ne postoji nijedna mehanička procedura za otkrivanje opovrgavanja u okviru predikatskog računa, na koji ćemo doći u Poglavlju 3 i 4.

P	Q	¬P	v	Q
T	T	FT	T	T
T	F	FT	F	F
F	T	TF	T	T
F	F	TF	T	F

što odgovara istim vrednostima, pripisivanje po pripisivanje, koje vrede i za P —> Q.

S obzirom na 35, P —> Q i ¬(P & ¬Q) su takođe međuizvodivi, a provera pomoću istinosnih tablica za ¬(P & ¬Q) daje sasvim isti rezultat. Intuitivno, najvažnija stvar o iskazu da ako P onda Q jeste u tome što mi izvesno želimo da on bude lažan ako je P istinito i Q lažno, a što je na kraju krajeva obezbeđeno pomoću matrice. Ostale vrednosti, koje se čine sasvim proizvoljnim, mogu biti opravdane uz pomoć maločas navedene međuzavisnosti rezultata. Kada smo se jednom saglasili oko matrice za —>, nakon toga sledi matrica za <—>, zato što hoćemo da P <—> Q bude ekvivalentno sa (P —> Q) & (Q —> P). Stvarno izračunavanje istinosne tablice ove poslednje wff pruža baš matricu za <—>; ovu činjenicu čitalac može sam proveriti.

Na osnovu provere pomoću istinosne tablice, možemo rasporediti sve wffs iskaznog računa na jedan od tri načina. Ako wff dobija vrednost T za sva moguća pripisivanja istinosnih vrednosti njenim varijablama, kaže se da je *tautološka* ili *tautologija*. Ako wff dobija vrednost F za sva moguća pripisivanja istinosnih vrednosti njenim varijablama, kaže se da je *inkonzistentna* ili *inkonzistencija*. Ako bar za jedno pripisivanje dobija vrednost T i bar za jedno pripisivanje vrednost F, kaže se da je *kontingentna* ili *kontingencija*. Sasvim je jasno da svaka wff jeste jedna i samo jedna od ove tri stvari, što se može iščitati neposredno iz glavne kolone istinosne tablice: ako se tamo svuda pojavljuje T, onda je tautološka; ako je sve F, inkonzistentna; ako je bar jedno T i bar jedno F, kontingentna. (Ponekad, umesto 'inkonzistencija', koristi se i termin 'kontradikcija' ili 'samo-kontradikcija'; ovde smo to mimoišli zato što je kontradikcija drugačije određena u Poglavlju 1, Odeljak 3.) Pored toga, kažemo i da je wff *konzistentna* ako je ili tautološka ili kontingentna; pa je tako wff konzistentna ako i samo ako za bar jedno pripisivanje dobija vrednost T, to jest ako i samo ako

nije inkonzistentna. Slično, wff je *ne-tautološka* ako je kontingentna ili inkonzistentna.

Od ovih pojmova najveći značaj ima tautologija. Tautologije su istinite bez obzira na istinosnu vrednost njenih gradivnih varijabli, što znači da su one istinite naprosto s obzirom na njihovu logičku formu, njihovu strukturu s obzirom na logičke veznike. Prema tome, tautologije se kao i teoreme mogu sagledati tako kao da izražavaju logičke zakone, iskaze koji su istiniti naprosto na logičkim osnovama. Ovo nameće pitanje o odnosu između teorema (određenih preko naših pravila derivacije) i tautologija (određenih preko vrednosti provere pomoću istinosnih tablica). Odgovor na ovo pitanje dat je u sledeća dva odeljka, u kojima smo pokazali da su sve teoreme tautologije i da sve tautologije na osnovu naših pravila mogu biti dokazane kao teoreme.

Postoji šest logičkih odnosa između dva iskaza koji su bili razlikovani u tradicionalnoj logici. U izvesnoj meri možemo koristiti metod istinosne tablice da bismo ustanovili njihovo prisustvo ili odsustvo. Prvo ću svaki od odnosa odrediti, a zatim ću prikazati kako se istinosne tablice mogu primeniti u odgovarajućim slučajevima.

(i) Dva iskaza A i B tradicionalno se zovu *kontrarni* ako nikada nisu oba istinita (mada oba mogu biti lažna); to jest, ako kada god je tačan jedan drugi je lažan. Reći sada da nikada nisu oba tačna, znači reći da je njihova konjunkcija uvek lažna, što opet znači da je negacija njihove konjunkcije, ¬(A & B), uvek istinita. Prema tome, *ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa*[1], podvrgavanjem ¬(A & B) istinosno-tabličnoj proveri možemo otkriti da li su A i B kontrarni; ako je to tautologija, onda jesu; ako nije, onda nisu. Zbog toga, reći da je ¬(A & B) *uvek* istinito, znači reći da je ona istinita za sva moguća pripisivanja istinosnih vrednosti njenim varijablama.

(ii) Dva iskaza A i B su *subkontrarna* ako nikada nisu oba lažna (mada oba mogu biti istinita); to jest, ako kad god je jedan lažan drugi je istinit. Reći sada da nikada oba nisu lažna znači

[1] Ovde kao i u drugim slučajevima uvodimo ovo ograničenje zato što za složenije iskaze, takve vrste kakva se izučava u Poglavljima 3 i 4, notacija iskaznog računa nije odgovarajuća, mehanizam istinosnih tablica se ne može više upotrebljavati za proveru ovih odnosa.

reći da je uvek bar jedan od njih istinit, što znači opet da je njihova disjunkcija, A v B, uvek istinita. Odatle, kao i u (i), ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, A i B su subkontrarni ako i samo ako je A v B tautologija.

(iii) Iskaz A *implicira* (implies) iskaz B ako kad god je A istinito istinito je B (ali ne nužno i obratno). Iz matrice za '—>' lako je videti da, ako se A i B može izraziti notacijom iskaznog računa, A povlači B ako je A —> B tautologija. U ovom slučaju, ponekad se kaže da je A *superimplikantno* ili da *superalternira* prema B.

(iv) Iskaz A je *posledica* (is implied by) iskaza B ako kad god je B istinito istinito je i A (ali ne i obratno). Ponovo je lako pokazati da, ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, A je posledica B, ako i samo ako je B —> A tautologija. U ovom slučaju, obično se kaže da je A *subimplikantno* ili da *subalternira* prema B.

(v) Dva iskaza A i B su *ekvivalentna* ako kad god je istinito A istinito je i B i kad god je istinito B istinito je i A. Lako je pokazati da, ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, A je ekvivalentno sa B ako i samo ako A <—> B jeste tautologija (sa ovog stanovišta, A <—> B zapravo tvrdi da A i B imaju istu istinosnu vrednost). U ovom slučaju, za A i B se ponekad kaže da su *koimplikativni*.

(vi) Dva iskaza A i B su *kontradiktorna* ako nikada nisu oba istinita i nikada nisu oba lažna; to jest, ako kad god je jedan istinit drugi je lažan i kad god je jedan lažan drugi je istinit. Reći sada da im se nikada *ne slažu* istinosne vrednosti, znači reći da nikada nije slučaj da oni imaju istu istinosnu vrednost. Odatle, ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, A i B su kontradiktorni ako i samo ako ¬(A <—> B) jeste tautologija.

Ako nijedan od ovih šest odnosa nije zastupljen izmedu A i B tada su A i B *nezavisni*. Ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, serije provera pomoću istinosnih tablica utvrdiće koji je to od odnosa među njima zastupljen a koji nije.

Ovaj deo tradicionalne logike može se sagledati kao jedan (neadekvatan) pokušaj da se navedu svi mogući odnosi izmedu dva iskaza koji uopšte mogu biti određeni putem istinosnih vrednosti. Jednostavan matematički račun pokazuje da postoji

šesnaest takvih odnosa, koje možemo prikazati u sledećoj tabeli:

A	B	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

Šesnaest kolona (a)-(p) daje sve moguce matrice kojih može biti, ukljucujuci i one koje se odnose na —>, &, v i <—>, a koje su razmatrane u prethodnom odeljku. Tako u (e) možemo prepoznati matricu za —>, u (h) matricu za &, u (b) matricu za v i u (g) matricu za <—>. Sada se P —> Q, P & Q, P v Q, P <—> Q mogu opisati kao *funkcije* P i Q, u doslednо istom smislu u kojem je x + y u algebri funkcija za x i y. Da bismo takve funkcije razlikovali od matematičkih funkcija nazvacemo ih *istinosne funkcije*. Gornja tablica tada navodi *sve moguce istinosne funkcije dve varijable*.

Ako se A i B mogu izraziti notacijom iskaznog računa, tvrdnja da A povlači B upravo jeste tvrdnja da funkcija A i B, koja je određena pomoću (e), naime A —> B, jeste tautologija. Slično, tvrdnja da su A i B subkontrarni jeste upravo tvrdnja da funkcija A i B koja je određena pomoću (b), naime A v B, jeste tautologija. Zbog toga što su različite funkcije određene na ovaj način pomoću (a)-(p) konačne po broju, postoji tačno šesnaest takvih tvrdnji o odnosu između A i B koje se mogu sačiniti: naime, za svaku funkciju, tvrdnja da je ta funkcija A i B tautologija. Zapravo, reći da su A i B ekvivalenti znači isto što i reći da ta funkcija, određena pomoću (g), A <—> B, jeste tautologija. Reći da je A posledica B, znači što i reći da funkcija određena pomoću (c) jeste tautologija, zato što se provera B —> A za četiri moguće kombinacije istine i laži pojavljuje kao kolona (c), pokazujući da je to funkcija koja je određena tom kolonom. Reći da su A i B kontrarni znači što i reći da je funkcija određena pomoću (i) tautologija; zato što se provera ¬(A & B) pojavljuje kao kolona (i) pokazujući tako da je to funkcija koja je određena tom kolonom. Na kraju, reći da su A i B kontradiktorni znači što i reći da funkcija određena pomoću (j) jeste tautologija; zato što se provera ¬(A <—> B) pojavljuje kao kolona (j), pokazujući da je to funkcija određena tom kolonom.

Tako se svakom od tradicionalnih odnosa (i)-(vi) pridružila jedna kolona iz (a)-(p), a postoji još deset dodatnih slično određenih odnosa koji nisu tradicionalno razlikovani.

Zanimljivo dodatno svojstvo ovih šesnaest funkcija jeste da, za svaku od njih, može biti pronađen izraz koji se služi samo sa ´—>´ i ´¬´, a koji mu je ekvivalentan. Radi preglednosti, navešćemo takav mogući skup izraza:

(a)	A —> A	(p)	¬(A —> A)
(b)	¬A —> B	(o)	¬(¬A —> B)
(c)	B —> A	(n)	¬(¬B —> A)
(d)	A	(m)	¬A
(e)	A —> B	(l)	¬(A —> B)
(f)	B	(k)	¬B
(g)	¬((A —> B) —> ¬(B —> A))	(j)	(A —> B) —> ¬(B —> A)
(h)	¬(A —> ¬B)	(i)	A —> ¬B

Stvarna provera ovih iskaza, pomoću matrica za ´—>´ i ´¬´, potvrdiće da su oni ekvivalentni sa šesnaest navedenih funkcija. S obzirom na činjenicu da ´P —> Q´ jeste ekvivalentno sa ´¬P v Q´, a tako i sa ´¬(P & ¬ Q)´, što smo videli ranije određujući matricu za ´—>´, tada nije iznenađujuće da, za svaku funkciju, može biti pronađen izraz koji sadrži samo ´v´ i ´¬´ (ili samo ´&´ i ´¬´) a koji mu je ekvivalentan.

Jedna od poslednjih primena istinosno-tabličnih postupaka zaslužuje da se ovde spomene. Ona je u vezi sa slučajevima substitucije, onako kako smo ih odredili u prethodnom odeljku. Zapazili smo prvo *da bilo koji slučaj substitucije tautologije i sam jeste tautologija.* Mada ovaj iskaz neću ovde dokazati u potpunosti, trebalo bi da je sasvim očigledan u svakom od slučajeva. Ako je A tautologija, A dobija vrednost T za *sva moguća* pripisivanja istinosnih vrednosti za njegove varijable. U postupku substiruiranja u A, mi svaku varijablu *sistematski* substituiramo na osnovu izvesne wff. Kada je slučaj substitucije u A podvrgnut istinosno-tabličnoj proveri, ta će wff, za svako pripisivanje, dobiti *istu* vrednost, T ili F. Odavde pa nadalje provera će slediti isti obrazac koji ima neki od redova prvobitne istinosno-tablične provere i moraće se takođe završiti pripisivanjem T za svaki slučaj substitucije. Na sličan način, ali utvrdivši F umesto T, vidimo da *bilo koji slučaj substitucije inkonzistencije jeste po sebi sama inkonzistencija.*

Međutim, u slučaju kontingencija se javlja različita situacija. Možemo pokazati da se, *za svaku kontingentnu wff, može naći slučaj substitucije koji je tautologija i može se naći slučaj substitucije koji je inkonzistencija.* Ovde to neću dokazati, ali ću ukazati na sasvim opšti postupak za pronalaženje takvih slučajeva substitucije, a ako se ovaj postupak izvodi dosledno u pojedinačnim slučajevima, čitalac će vrlo brzo uvideti razlog njegovog važenja.

Neka A bude kontingentna wff. Tada bar jedno pripisivanje vrednosti njenim varijablama dobija vrednost T. Izaberi neko pojedinačno takvo pripisivanje i svaku varijablu u A substituira bilo kojom tautologijom (recimo 'P –> P') ako varijabla ima vrednost T u tom pripisivanju i bilo kojom inkonzistencijom (recimo '¬(P –> P)') ako varijabla ima vrednost F u tom pripisivanju. Tada će ishodišni slučaj substitucije u A biti *tautologija*. Takođe, zato što je A kontingentna, za barem jedno pripisivanje vrednosti njenim varijablama ona dobija vrednost F. Izaberi neko takvo pripisivanje i nakon toga nastavi do kraja sa dosledno istim postupkom, substituirajući sa 'P –> P', recimo, bilo koju varijablu sa vrednošću T u tom pripisivanju i sa '¬(P –> P)', recimo, bilo koju varijablu sa vrednošću F. Tada će ishodišni slučaj substitucije u A biti *inkonzistencija*.

Biće dovoljan jednostavan primer. 'P v Q' je kontingencija, zato što dobija vrednost F ako je P=F i Q=F, dok u ostalim slučajevima dobija vrednost T. Izaberi pripisivanje P=T, Q=T, za koje je P v Q = T i dosledno tome substituira 'P' sa 'P –> P' i 'Q' sa '¬(P –> P)'. Odatle je rezultat, '(P –> P) v ¬(P –> P)', tautološki slučaj substitucije 'P v Q'. Slično, '¬(P –> P) v ¬(P –> P)', koje odgovara pripisivanju P=F i Q=F, jeste inkonzistentan slučaj substitucije ove iste kontingentne wff.

V e ž b e

1 (i) Izvrši istinosno-tablične provere na sledećim wffs i za svaki od slučajeva utvrdi da li je wff tautologija, kontingencija ili inkonzistencija:

(a) P –> P

(b) P –> ¬P

(c) ¬(P –> P)

(d) P
(e) ¬P –> (P –> Q)
(f) (P <–> Q) <–> ¬(P <–> ¬Q)
(g) (P & Q) & ¬(P <–> Q)
(h) (P v ¬Q) & ¬(¬P –> ¬Q)
(i) (P & Q –> R) –> (P –> R) & (Q –> R)
(j) (P v Q –> R) <–> (P –> R) & (Q –> R)
(k) (P –> Q) & (R –> S) –> (P v R –> Q v S)

(ii) U slučajevima kontingencija među (a)-(k) iz (i), pronađi slučaj substitucije koji je tautologija i takav koji je konzistencija.

2 (i) Pronađi izraze koji su ekvivalentni svakom od šesnaest mogućih istinosnih funkcija od dve varijable, koristeći (a) samo ´&´ i ´¬´ i (b) samo ´v´ i ´¬´.

(ii) Funkcije (i) i (o) možemo obeležiti na tablici mogućih istinosnih vrednosti pomoću ´A | B´ odnosno ´A ↓ B´ (funkcija ponekad poznatih kao ´crte´); ´A | B´ se može čitati kao ´ne i A i B´, a ´A ↓ B´ kao ´niti A niti B´). Pronađi izraze koji su ekvivalentni svakoj od šesnaest mogućih istinosnih funkcija dve varijable upotrebljavajući (a) samo ´| ´ i (b) samo ´↓´. (Napomena: provera ´P | P´ i ´P ↓ P´ iznosi na videlo njihovu ekvivalenciju sa ´¬P´. Tako je ´(P | Q) | (P | Q)´ ekvivalentno sa ´¬(P | Q)´ i takođe sa ´P & Q´. Slično, ´(P ↓ Q) ↓ (P ↓ Q)´ je ekvivalentno sa ´P v Q´.)

3 (i) Neka A bude wff koja sadrži bilo koji broj varijabli ali samo ´&´ kao njen jedini veznik: (a) pokaži da A ne može biti tautologija; (b) pokaži da A ne može biti inkonzistentna.

(ii) Neka A bude wff koja sadrži bilo koji broj varijabli ali samo ´v´ kao njen jedini veznik: (a) pokaži da A ne može biti tautologija; (b) pokaži da A ne može biti inkonzistencija.

4 Razmotri ove tri wff:

(a) P & (R –> R) –> ¬Q
(b) P & (Q v R)
(c) P –> (Q <–> R)

(i) Pokaži da nijedna od (a)-(c) ne povlači bilo koju drugu.

(ii) Pokaži da jedna i samo jedna od (a)-(c) jeste supkontrarna preostalim dvema.

5 (i) Za bilo koju wff A i B, ako su A i B kontrarni, pokaži da svaka povlači negaciju druge kao i da su njihove negacije supkontrarnost.

(ii) Za bilo koju wff A i B, ako su A i B subkontrarni, pokaži da negacija svake povlači ovu drugu kao i da su njihove negacije kontrarnost.

(iii) Pokaži, za bilo koje wffs, A i B, da su A i B ekvivalentne (a) ako i samo ako $\neg$A i $\neg$B su ekvivalentne i (b) ako i samo ako su A i $\neg$B kontradiktorne.

6 (i) Načini tabelu koja pokazuje sve moguće istinosne funkcije jedne varijable i za svaku od njih pronađi ekvivalentan izraz koji sadrži samo '$\rightarrow$' i '$\neg$'.

(ii) Koliko postoji različitih mogućih istinosnih funkcija sa tri varijable? Sa n varijabli?

4 Konzistencija iskaznog računa

Pristup istinitim tablicama sada pridodajemo iskaznom računu da bismo dobili potvrdan odgovor na pitanje: da li su naša pravila derivacije pouzdana? Zapravo pokazujemo da svaka teorema koja se može dokazati putem pravila jeste tautologija na osnovu provere putem istinosnih tablica, tako da ne postoje teoreme koje su inkontingentne niti teoreme koje su inkonzistentne, a posebno to da nijedna kontradikcija A & $\neg$A, koja bi naravno bila inkonzistentna, ne može biti derivirana. Međutim, nas zanimaju ne samo teoreme, već i sekventi uopšte; mi želimo da budemo sigurni u to da su svi derivabilni sekventi pouzdani obrasci argumenta. Da bismo postigli ovaj neposredan ishod potrebno nam je prvo da proširimo primenu istinosno-tabličnog postupka od wffs na sekvent-izraze.

Proširenje je lako. Uzmimo da je

$$A_1,\ldots, A_n \vdash B$$

bilo koji sekvent-izraz. Tada istinosno-tablična provera nad $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ jeste evaluacija wffs $A_1,\ldots, A_n \vdash B$ za svako moguće pripisivanje istinosne vrednosti varijablama koje se događaju u $A_1,\ldots,A_n \vdash B$. Takvu proveru možemo izložiti navođenjem sa leve strane sekvent-izraza svih varijabli koje se

događaju u *bilo kojoj* od wffs iz $A_1, \ldots, A_n$, B, potpisujući ispod njih sva moguća pripisivanja istinosnih vrednosti na standardan način, a potom istinosno-tablično proveravajući posebno svaku wff u sekvent-izrazu za ta pripisivanja. Stoga:

P	Q	P -> Q	, ¬Q	⊢ ¬P
T	T	T T T	FT	FT
T	F	T F F	TF	FT
F	T	F T T	FT	TF
F	F	F T F	TF	TF

Nakon toga, određujemo šta znači da je sekvent-izraz tautologija. $A_1, \ldots, A_n$ ⊢ B je *tautologija* ako za svako pripisivanje istinosne vrednosti njenim varijablama za koje svaka iz $A_1, \ldots, A_n$ uzima vrednost T, B uzima vrednost T takođe. Prethodno provereni sekvent-izraz je tautologija; postoji samo jedno pripisivanje (P=F, Q=F) za koje i 'P -> Q' i '¬Q' uzimaju vrednost T, i za to pripisivanje konkluzija '¬P' takođe uzima vrednost T. Ekvivalentno tome $A_1, \ldots, A_n$ ⊢ B je tautologija ako ne postoji pripisivanje za koje je $A_1, \ldots, A_n$ istinito a B lažno. U graničnom slučaju, gde sekvent-izraz nema asumpcije $A_1, \ldots, A_n$, ova definicija naprosto zahteva da B uzme vrednost T za sva pripisivanja istinosnih vrednosti njegovim varijablama, pa će tako B biti tautologični sekvent-izraz tek u slučaju da je B tautologična wff.

Drugi, ponekad koristan, način da se objasni tautologični sekvent-izraz jeste da se svakom sekvent-izrazu $A_1, \ldots, A_n$ ⊢ B pridruži wff koju ćemo zvati *odgovarajući kondicional* (the corresponding conditional):

$$A_1 \text{ -> } (A_2 \text{ -> } (\ldots (A_n \text{ -> } B) \ldots))$$

Stoga je za gore provereni sekvent-izraz odgovarajući kondicional:

$$(P \text{ -> } Q) \text{ -> } (\neg Q \text{ -> } \neg P).$$

Kao granični slučaj, ukoliko nema asumpcija $A_1, \ldots, A_n$, odgovarajući kondicional biće naprosto B samo (što je pomalo čudno, jer B može stvarno uopšte ne biti kondicional). Tada možemo pokazati da je sekvent-izraz tautologija (u gore određenom smislu) ako i samo ako je njegov odgovarajući kondicional tautologija (u smislu datom u prethodnom odeljku).

Pretpostavimo za sekvent-izraz $A_1,...,A_n \vdash B$ da njemu odgovarajući kondicional nije tautologija. Onda neka istinosnovrednosna pripisivanja varijablama u $A_1,...,A_n \vdash B$ daju F kao vrednost za $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B)...))$. Po matrici za '$\rightarrow$', to je moguće jedino ako je za to pripisivanje A_1 = T, a $A_2 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B)...)$ = F. Ovo je daljim sledom jedino moguće ako je A_2 = T, a $A_3 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B)...)$ = F. Nastavljajući, vidimo da za ovo pripisivanje $A_1,..., A_n$, *svi* oni moraju uzeti vrednost T, a B vrednost F, odakle sledi i da $A_1,..., A_n \vdash B$ isto tako nije tautologija. Obratno, pretpostavimo da $A_1,..., A_n \vdash B$ nije tautologija. Tada za neko pripisivanje $A_1,..., A_n$ svi uzimaju vrednost T, dok B uzima vrednost F. Za ovo pripisivanje, po matrici za '$\rightarrow$', $A_n \rightarrow B$ = F, odakle, $A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)$ = F i tako dalje. Tako, odgovarajući kondicional, $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B)...))$, mora za ovo pripisivanje uzeti vrednost F, pa isto tako nije tautologija.

Dakle, kao alternativa u odnosu na gornju proveru, možemo proveriti odgovarajući kondicional nekog sekvent-izraza na uobičajen način, kako bismo utvrdili da li je sekvent-izraz tautologija ili nije.

Radi jasnoće, nazovimo sekvent *derivabilnim* (derivable) ukoliko se može pronaći dokaz, služeći se pri tome samo sa deset prvobitnih pravila derivacije. Glavni rezultat ovog odeljka dajemo sledećom *metateoremom* (zadržali smo naziv 'teorema' za izvesne rezultate *unutar* iskaznog računa, ali ovde se pre radi o rezultatu koji je *o* tom računu):

Metateorema I: Svi derivabilni sekventi su tautologije.

Prikaz dokaza. Treba da imamo na umu da je broj derivabilnih sekvenata neograničeno velik (na primer, svi mogući slučajevi substitucije derivabilnog sekventa su takođe tautologije, što znamo na osnovu (S2)) tako da ne možemo nastaviti da ispitujemo individualne sekvente redom jedan po jedan: neophodan nam je opšti metod dokaza. Metod koji upotrebljavamo srodan je neposredno matematičkom metodu poznatom kao *dokaz putem indukcije.* Ako želimo da pokažemo da *svi* brojevi imaju izvesno svojstvo, dovoljno je da pokažemo da O ima to svojstvo, te da ako ovaj dati broj ima to svojstvo tada sledeći broj u nizu ima to

svojstvo[5]. Uzimajući da 0 ima to svojstvo, tada možemo pokazati da ga ima i 1; uzimajući da ga i 1 ima, možemo pokazati da ga ima i 2; i tako dalje, sve do bilo kojeg datog broja. U ovom našem slučaju setimo se da derivabilni sekventi imaju, po definiciji, dokaz, te da se ovaj dokaz, koji može biti onoliko dugačak koliko god to mi želimo ali može biti samo konačno dugačak, razvija postepeno. On treba da počinje sa primenom pravila A, jer ne postoji drugi način započinjanja dokaza. I bilo koji sledeći korak (što je bezmalo takođe primena A) jeste na određen način zasnovan na prethodnom redu dokaza. Prema tome, ako možemo da pokažemo (i) da bilo koja primena A po sebi daje tautološki sekvent; i (ii) da bilo koja primena drugih devet pravila zasnovana na redovima koji odgovaraju tautološkim sekventima daje tautološki sekvent, tada ćemo imati efektivno pokazano da bilo koji sekvent koji je uopšte derivabilan jeste tautolologija. Stoga se naš dokaz deli na dva nivoa: pokazujemo (α) da bilo koja primena A daje tautološki isečak; prikazujemo (β) da *ako* na datom nivou dokaza prethodni redovi odgovaraju tautološkim sekventima, *onda* primena nekog od preostalih devet pravila na neki od tih redova daje ishodišni red koji takođe odgovara tautološkom sekventu. Stoga u (β) ovaj se rad prirodno raspoređuje u devet faza, kojima odgovara devet pravila, i u svakoj fazi utvrđujemo *kondicionalni iskaz*.

Dokaz za (α). Svaki sekvent derivabilan na osnovu pravila o asumpciji jeste i sam tautologija. Zato što takav sekvent mora imati oblik A ⊢ A, koji je očigledno tautologija.

Dokaz za (β). (i) MPP. U primeni MPP polazimo od premisa A i A –> B do konkluzije B, na osnovu uloženih asumpcija na kojima A i A –> B počivaju. Pretpostavimo sada da redovi u kojima se A i A –> B pojavljuju odgovaraju tautološkim sekventima. Želimo da pokažemo da će novi red u kojem se B pojavljuje takođe odgovarati tautološkom sekventu. Pretpostavimo da to nije tako i derivirajmo njegovu apsurdnost. Ako novi sekvent nije tautologija, onda je jasno da neko pripisivanje istinosne vrednosti njegovim varijablama daje B-u vrednost F, ali zato

[5] Ovde se pod 'brojem' podrazumeva prirodan broj (cf. fn. 12), to jest, jedan od brojeva 1, 2, 3, itd.

svim njegovim asumpcijama vrednost T. Pošto te asumpcije uključuju sve ono na čemu počivaju A i A –> B, isto će pripisivanje dati za A i A –> B vrednost T, zato što na osnovu zamene redovi u kojima se oni pojavljuju odgovaraju tautološkim sekventima. Ali ako ovo pripisivanje daje i za A i za A –> B vrednost T, ono mora takođe za B dati vrednost T, po matrici za '–>': što je apsurdno, zbog toga što smo pretpostavljali da B za pripisivanje o kojem je reč ima vrednost F. Prema tome bilo koja primena MPP na tautološki sekvent pruža tautološki sekvent.

(ii) DN. U primeni DN polazimo, na istim asumpcijama, od premise A ka konkluziji ¬¬A, ili vice versa. Pretpostavimo, u prvom slučaju, da je red u kojem se A pojavljuje tautologija. Tada bilo koje pripisivanje istinosne vrednosti varijablama u sekventu koji je tamo dokazan, koje pruža svakoj asumpciji vrednost T, pruža istu vrednost i za A. Po matrici za '¬', svako takvo pripisivanje će takođe dati vrednost T i za ¬¬A, tako da će novi red gde se pojavljuje ¬¬A takođe biti tautologija. Drugi slučaj (gde je ¬¬A premisa a A konkluzija) je sličan. Prema tome, bilo koja primena DN na tautološke sekvente daje takođe tautološke sekvente.

(iii) MTT. Razmatranja slična onima u (i) pokazuju da bilo koja primena MTT na tautološke sekvente vodi tautološkim sekventima. (Otuda što MTT može biti shvaćeno kao derivirano pravilo, kao što je pokazano u Odeljku 2 ovog poglavlja, nije potrebno ovde ga posebno razmatrati.)

(iv) CP. U primeni CP postići ćemo najviše ako polazimo od sekventa čija je forma $A_1,..., A_n, A_{n+1}$ ⊢ B ka sekventu čija je forma $A_1,..., A_n$ ⊢ A_{n+1} –> B, gde je A_{n+1} otpuštena asumpcija (disharged assumption). Pretpostavimo da je $A_1,..., A_n, A_{n+1}$ ⊢ B tautologija, ali da $A_1,..., A_n$ ⊢ A_{n+1} –> B nije. Tada neko pripisivanje istinosne vrednosti varijablama u sekventu daje za svako iz $A_1,..., A_n$ vrednosti T, a za A_{n+1} vrednost F. Po matrici za '–>' ovo pripisivanje daje za A_{n+1} vrednost T, a za B vrednost F, jer bi u suprotnom A_{n1} –> B imalo vrednost T. Ali takvo bi pripisivanje svrstalo $A_1,..., A_n, A_{n+1}$ ⊢ B u netautologično, što je suprotno pretpostavljenom. Prema tome, bilo koja primena CP na tautološke sekvente vodi

ka tautološkim sekventima.

(v) &I. U primeni &I polazimo od premisa A i B ka konkluziji A & B, na osnovu uloženih asumpcija na kojima A i B počivaju. Pretpostavimo da redovi gde se A i B pojavljuju odgovaraju tautološkim sekventima. Tada bilo koje pripisivanje istinosne vrednosti varijablama, koje daje svim ovim asumpcijama vrednost T, pruža za A i B nezavisno vrednost T, zato što su u taj ulog uključene njima odgovarajuće asumpcije. Prema tome, po matrici za '&' bilo koje takvo pripisivanje daje za A & B takođe vrednost T. Tako bilo koja primena &I na tautološke sekvente vodi ka tautološkim sekventima.

(vi) &E. Kao laka vežba čitaocu je ostavljeno da pokaže da bilo koja primena &E na tautološke sekvente daje tautološke sekvente.

(vii) vI. Razmatranje matrice za 'v' pokazuje da bilo koja primena vI na tautološke sekvente daje tautološke sekvente. Detalji su ostavljeni čitaocu.

(viii) vE. U primeni vE polazimo od premisa A v B, zajedno sa dokazom C iz A i dokazom C iz B, ka konkluziji C, na osnovu uloga asumpcija na kojima počiva A v B, kao i onih koje su upotrebljene da se C derivira iz A (a različitih od A) i onih upotrebljenih da se derivira C iz B (a različitih od B). Pretpostavimo tada da red gde se A v B pojavljuje odgovara tautološkom sekventu, a to je isto tako i sa redovima gde se pojavljuje C kao konkluzija iz A i kao konkluzija iz B. Treba da pokažemo da je red gde se C pojavljuje kao konkluzija iz složenog uloga asumpcija takođe tautološki sekvent. Pretpostavimo, dakle, da on to nije. Tada neko pripisivanje istinosne vrednosti njegovim varijablama daje za sve asumpcije vrednost T, dok za C vrednost F. Ove asumpcije obuhvataju sve one na kojima A v B počiva, prema tome pripisivanje mora dati za A v B vrednost T. Odatle, po matrici za 'v', ili A ili B ima vrednost T za ovo pripisivanje. Pretpostavimo da A ima vrednost T. Tada onaj red u kojem je C derivirano iz A ne može biti tautologija, jer ovo pripisivanje daje za sve njegove asumpcije, uključujući i A, vrednost T, dok C ima vrednost F. Pretpostavimo tada da B ima vrednost T. Slično, red gde je C derivirano iz B u ovom slučaju ne može biti tautologija. U bilo kojem slučaju, imamo

apsurdan ishod. Prema tome, bilo koja primena vE na tautološke sekvente vodi tautološkim sekventima.

(ix) RAA. U primeni RAA najbolje cemo postići ako idemo od sekventa čiji je oblik $A_1, ..., A_n, A_{n+1} \vdash B \& \neg B$, ka sekventu čiji je oblik $A_1, ..., A_n \vdash \neg A_{n+1}$. Pretpostavimo da je prethodni sekvent tautološki, a da potonji to nije. Tada neko pripisivanje istinosne vrednosti varijablama u potonjem sekventu pruža za svako od $A_1, ..., A_n$, vrednosti T, a za $\neg A_{n+1}$ vrednost F, odakle, po matrici za ´¬´, mora dati za A_{n+1} vrednost T. To pripisivanje stoga daje za sve asumpcije prethodnog sekventa vrednost T, tako da, na pretpostavci da je ovo tautologija, mora za B & ¬B takođe dati vrednost T, što je apsurdno na osnovu matrice za ´&´ i ´¬´. Prema tome, svaka primena RAA na tautološke sekvente pruža tautološke sekvente.

Govoreći uopšteno, ako je bilo koja primena bilo kojeg od devet pravila učinjena na tautološkim sekventima, ishod je tautološki sekvent. Samim tim što uz pomoć A možemo početi samo sa tautološkim sekventima, bilo koji sekvent koji možemo derivirati uz pomoć naših prvobitnih pravila jeste tautologija. Tako dobijamo ovu metateoremu.

Kao neposredna posledica Metateoreme I, za poseban slučaj gde derivabilni sekvent nema asumpcije pa je tako njegova konkluzija teorema, imamo:

Korolar I: Sve teoreme iskaznog računa su tautologije.

Kažemo da je logički sistem, takav kao što je iskazni račun, *konzistentan* ako nam naša pravila za njega ne dozvoljavaju da kao teoremu deriviramo kontradikciju. Zbog toga što je A & ¬A nekonzistencija i time nije tautologija, iz Korolara I imamo:

Korolar II: Iskazni račun je konzistentan.

Sada će biti jasno zašto sam, u razmatranju deriviranih pravila kao što su to TI i SI, naglasio da bi dokaz koji se koristi ovim pravilima uvek mogao biti substituiran (generalno dužim) dokazom istog sekventa koji koristi samo prvobitna pravila. U suprotnom ne bismo bili sigurni, bez posebnog dokaza, da nam oba pravila ne bi omogućavala da dokažemo sekvente koji su ne-tautološki.

Pogledajmo zašto bi Metateorema I trebalo da podstakne poverenje u pouzdanost naših pravila derivacije. Nužan uslov

osnovanog (validnog) argumenta, na čemu smo se u početku zalagali, sastoji se u tome da nikada ne smemo poći od istinite asumpcije i doći do lažne konkluzije. Bilo koji argument koji za svoj obrazac ima derivabilni sekvent iskaznog računa zadovoljiće, možemo to sada videti, barem ovaj uslov. Zato što je svaki takav sekvent, po Metateoremi I, tautologija, što znači da u bilo kojem slučaju tamo gde su njegove asumpcije tačne tačna je takođe i njegova konkluzija. Ne postoje pojedinačni iskazi pomoću kojih možemo da substituiramo P, Q, R, itd, derivabilnog sekventa tako da dobijemo istinite asumpcije ali lažna konkluzija. Na ovaj način pristup pomoću istinosne tablice pomogao je da se objasni temeljno pitanje koje se tiče naših pravila derivacije.

U meri u kojoj sada, po svemu sudeći, osećamo izvestan stepen poverenja u osnovanost derivabilnih sekvenata, možemo upotrebiti naša pravila da se pokaže validnost stvarnih argumenata na taj način što ćemo utvrditi da je njihove obrasce moguće lako dokazati iz pravila. Medjutim, pristup pomoću istinosne tablice dodatno nam omogućuje da pokažemo *invalidnost* argument-obrasca. Pretpostavimo da provera putem istinosne tablice pokazuje da izvesni sekvent *nije* tautologija. Tada po Metateoremi I on *nije* derivabilan iz naših pravila; niti bismo hteli da to bude, zato što ova provera pokazuje kako se u nekom pripisivanju istinosnih vrednosti njegovim varijablama možemo osvedočiti za sve njegove asumpcije kako opovrgavaju njegovu konkluziju. Treba samo da substituiramo vrednosti u ovom pripisivanju stvarnim iskazima (prirodnog jezika) sa tim vrednostima da bismo otkrili da se radi o slučaju argumenta-obrasca koji očigledno nije validan - istinite asumpcije i neistinita konkluzija. Prema tome, možemo potragu za takvim iskazima, što iziskuje dovitljivost, zameniti proverom pomoću istinosne tablice, što u najgorem slučaju zahteva samo pažnju.

Često sav posao oko provere putem istinosne tablice može biti zamenjen jednostavnom kontrolom. Na primer, uzmimo

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \& \neg Q \vdash \neg R$.

Da li je validno ili invalidno? Pokušajmo da ga *učinimo invalidnim*, pripisujući vrednost T za 'P —> (Q —> R)' i za 'P & ¬Q', a vrednost F za '¬R'. Ako P & ¬Q = T, onda 'P' i '¬Q' moraju oboje dobiti vrednost T, odakle P=T, Q=F. Ako ¬R=F onda R=T. Ali za te

vrednosti dobijamo onda da je P –> (Q –> R) = T. Drugim rečima, pripisivanje P=T, Q=F, R=T daje vrednost T za obe asumpcije i F za konkluziju, na taj način pokazujući mimo provere, kroz punih osam redova, da sekvent nije tautologija. S druge strane, uzmimo:

(2) P –> (Q –> R), P & ¬R |– ¬Q.

Kad pokušamo da učinimo invalidnim (2) uzimajući da je P&¬R=T, ¬Q=F, dobijamo da je P=T, R=F, Q=T. S tim što je za ovo pripisivanje P –> (Q –> R) = F. Ovo pokazuje da nijedno pripisivanje istinosnih vrednosti ne može svrstati obe asumpcije u istinite, a da konkluzija bude lažna; sekvent je stoga tautologija, te možemo nastaviti da tražimo njegov dokaz iz naših pravila.

Na kraju još koja reč o paradoksima materijalne implikacije (uporedi Odeljak 2): u pregledu matrica za ´–>´ datih u Odeljku 3 držali smo da je kondicional P –> Q istinit ako je njegov konsekvent Q istinit *što god da je istinosna vrednost njegovog antecedenta P*; i držali smo da je kondicional P –> Q tačan ako je njegov antecedent lažan *što god da je istinosna vrednost njegovog konsekventa Q*. Rezultati iz 50 i 51 se mogu shvatiti kao jednostavni odrazi ove činjenice koja je sadržana u obliku sekventa, pa zbog toga mogu biti prihvaćeni kao sigurni obrasci zaključivanja koje pruža ovakvo shvatanje istinosne vrednosti za ´–>´. Po Metateoremi I oni su tautologija i zbog toga nas neće zavesti od istinite asumpcije na lažnu konkluziju. U stvari, ´P –> Q´ se razlikuje od ´ako P onda Q´ (u najobičnijem smislu ovih reči) tačno u toj meri u kojoj je ´P –> Q´ *istinosna funkcija* za P i Q - čija je istinita vrednost potpuno određena vrednostima P i Q - a što ´ako P onda Q´ nije. Međutim, ono što oni imaju *zajedničko* jeste to značajno svojstvo da se oba svrstavaju u *lažne* u slučaju da je P tačno a Q lažno: Nužan uslov za istinitost ´ako P onda Q´ jeste da nije istovremeno slučaj da i P i ne Q; ali ovaj uslov je ujedno i nužan *i dovoljan* za istinitost ´P –> Q´, kao što to očito pokazuje njegova ekvivalencija ´¬(P & ¬Q)´.

V e ž b e:

1 Kao dalje vežbe u otkrivanju dokaza, a i stoga što su nam ta rešenja potrebna u sledećem odeljku, dokaži sledeće sekvente:

(a) P & Q ⊢ P -> Q
(b) ¬P & Q ⊢ P -> Q
(c) ¬P & ¬Q ⊢ P -> Q
(d) P & ¬Q ⊢ ¬(P & Q)
(e) ¬P & Q ⊢ ¬(P & Q)
(f) ¬P & ¬Q ⊢ ¬(P & Q)
(g) P & ¬Q ⊢ P v Q
(h) ¬P & Q ⊢ P v Q
(i) P & Q ⊢ P <-> Q
(j) P & ¬Q ⊢ ¬(P <-> Q)
(k) ¬P & Q ⊢ ¬(P <-> Q)
(l) ¬P & ¬Q ⊢ P <-> Q

2 Pokaži invalidnost sledecih obrazaca argumenta tako što ćeš pronaci pripisivanje takve istinosne vrednosti za varijable da sve asumpcije budu tačne a konkluzija lažna:

(a) P & Q -> R ⊢ P -> R
(b) P -> Q v R ⊢ P -> Q
(c) P -> Q, P -> R ⊢ Q -> R
(d) P -> R, Q -> R ⊢ P -> Q
(e) P -> (Q -> R), Q, ¬R ⊢ P
(f) P <-> ¬Q, Q <-> ¬R, R <-> ¬S ⊢ P <-> S

5 Kompletnost iskaznog računa

Pažljivi čitalac će bez sumnje primetiti da, mada sam u poslednjem odeljku pokazao da su svi derivabilni sekventi bili tautološki, otvoreno pitanje ostaje da li važi i obratno: to jest da li su svi tautološki sekventi derivabilni iz naših pravila. Predmet ovog odeljka jeste da dokaže da je to tako. Značaj tog rezultata leži u činjenici da on pruža odgovor na izuzetno značajno pitanje koje je postavljeno na početku poglavlja: u kojem smislu možemo da shvatimo da su naša pravila kompletna? Sa stanovišta onoga što treba da dokažemo, ona su kompletna u tom smislu da pružaju dokaze za sve tautološke sekvente. Stoga, ako smo dodali pravila koja su nam omogućila da dokažemo sekvente koji svakako nisu derivabilni, oni bi samo mogli biti netautološki sekventi, a što sa intuitivnog stanovišta gledano ne bi trebalo da želimo da shvatimo kao osnovane obrasce argumenta: zbog toga

što za njih postoji takvo pripisivanje istinosnih vrednosti koje čini da su sve asumpcije istine, a da je konkluzija lažna.

Radije ćemo prihvatiti sledeći dokaz. Kao Metateoremu II dokazujemo da su sve tautološke wffs (pre nego sami sekventi) derivabilne kao teoreme. Dokaz ovoga postiže se pomoću *leme*, ili pomoćnog rezultata (ishoda) koji je u ovom postupku neophodan. Metateorema III, da su svi tautološki sekventi derivabilni, sledi vrlo lako iz Metateoreme II. Na kraju deriviramo izvesne korolare iz ovih metateorema i razmatramo iskazni račun u svetlu ovih rezultata.

Metateorema II: Sve tautološke wffs su derivabilne kao teoreme.

Nacrt dokaza. Biramo wff A koja je po hipotezi tautologija na osnovu provere putem istinosnih tablica. Naravno, A može biti velike dužine i složenosti; sve što o njoj znamo jeste da za svako pripisivanje istinosnih vrednosti varijablama koje je čine ona dobija vrednost T. Naš zadatak jeste da pokažemo kako dokaz za takvu wff kao teoremu, koristeći se pri tome samo sa naših deset pravila derivacije, uopšte može biti pronađen. Mi u traženom dokazu suštinski ovo činimo podražavanjem provere pomoću istinosne tablice. Lemom pokazujemo da svaki red provere pomoću istinite tablice *bilo koje* wff ima odgovarajući derivabilni sekvent koji se može zabeležiti; asumpcije sekventa su varijable u datoj wff, koje se u pripisivanju o kojem se radi pojavljuju ili negirane ili ne-negirane, već prema tome da li varijabla ima vrednost F ili T; konkluzija sekventa je ona wff koja je proveravana i ona se pojavljuje ili negirana ili ne-negirana, već prema tome da li za pripisivanje o kojem se radi dobija vrednost F ili T. Tada pokazujemo kako u slučaju *tautološke* wff A, možemo upotrebiti derivabilne sekvente koji su putem leme doprineli da se A derivira kao teorema.

Dokaz

Lema. Neka A bude bilo koja wff koja sadrži iskazne promenljive $V_1, \ldots, V_n$, i uzmimo neko pripisivanje istinosnih vrednosti za $V_1, \ldots, V_n$. Za bilo koju takvu varijablu V_i, neka W_i bude ili V_i ili $\neg V_i$, već prema tome da li V_i dobija vrednost T ili F u datom pripisivanju. Tada možemo derivirati ili

$$W_1, \ldots, W_n \vdash A$$

ili

$W_1, \ldots, W_n \vdash \neg A$

već prema tome da li A za ovo pripisivanje dobija vrednost T ili F.

Primer: Pretpostavimo da je A ´¬P —> ¬Q v R´ i uzmimo pripisivanje P=F, Q=T, R=F. Za ovo pripisivanje wffs W_i su ´¬P´ (jer je P=F), ´Q´ (jer je Q=T) i ´¬R´ (jer je R=F). Za ovo pripisivanje, ´¬P —> ¬Q v R´ dobija se vrednost F, što provera brzo pokazuje. Na osnovu leme odgovarajuća je druga alternativa, pa

¬P, Q, ¬R ⊢ ¬(¬P —> ¬Q v R)

jeste derivabilan sekvent.

Dokaz leme. Tehnika dokaza je srodna onoj koja je korišćena u dokazu Metateoreme I, a slična je opet matematičkoj indukciji. Pokazujemo: (α) da lema koja važi u slučaju A jeste najkraća moguća wff, odnosno iskazna varijabla; i (β) da ako lema važi za wffs B i C, onda takodje važi i za ¬B, B —> C, B & C, B v C i B <—> C. Iz (α) i (β) sledi da ova lema važi za *bilo koju* wff, samim tim što je, s obzirom na pravila formiranja u Odeljku I, svaka wff obrazovana od iskaznih varijabli na osnovu uvođenja sistematskim putem takvih veznika kao što su ´¬´, ´—>´, ´&´, ´v´ i ´<—>´.

(α) Pretpostavimo da je A iskazna varijabla V. Postoje samo dva moguća pripisivanja za V, zapravo V=T i V=F. Uzmimo pripisivanje V=T, tada A, budući da je V, dobija baš vrednost T. Prema tome, treba da pokažemo da je

V ⊢ V

derivabilno. Ovo je neposredno očigledno na osnovu pravila A (cf. sekvent 29). Slično, ako je V=F, tada A, budući da je V, dobija takođe vrednost F, te treba da pokažemo da je

¬V ⊢ ¬V

derivabilno. Ovo je, kao u prethodnom slučaju, neposredna posledica pravila A.

(β) Pretpostavimo da lema važi za wffs B i C. Treba da pokažemo da to važi za ¬B, B —> C, B & C, B v C i B <—> C. Utvrđujemo redom slučajeve.

(i) ¬B. Neka $V_1,..., V_n$ budu varijable iz B i pretpostavimo da, prvo, dato pripisivanje B dobija vrednost T. Za ovo pripisivanje ¬B će dobiti vrednost F. Po hipotezi, lema se primenjuje na B, tako da

$W_1,...,W_n \vdash B$

jeste derivabilno, pri čemu su $W_1,..., W_n$ u neposrednoj vezi sa $V_1,..., V_n$, kako je to opisano u lemi. Treba da pokažemo da je

$W_1,...,W_n \vdash \neg\neg B$

derivabilno. Ovo je neposredno očigledno iz dokaza datog sekventa, pomoću jednog koraka sa DN. Pretpostavimo, drugo, da za bilo koje dato pripisivanje B dobija vrednost F, odakle sledi da ¬B dobija vrednost T. Po hipotezi primenjuje se lema, tako da je

$W_1,...,W_n \vdash \neg B$

derivabilno. A to je upravo sekvent koji treba da dokažemo da bismo pokazali da se lema primenjuje na ¬B.

(ii) B –> C. Neka $U_1,...,U_j$ budu varijable u B i $V_1,...,V_k$ određene (ne nužno različite) varijable u C. Treba da utvrdimo četiri slučaja, prema kojima, za dato pripisivanje na $U_1,...,U_j$, $V_1,...,V_k$, dobijamo B=T i C=T, B=T i C=F, B=F i C=T, ili B=F i C=F.

(*a*) Pretpostavimo da je B=T i C=T. Tada je, po matrici za –>, B –> C = T. Po hipotezi, možemo derivirati da

$W_1,..., W_j \vdash B$

i

$X_1,..., X_k \vdash C$,

pri čemu su $W_1,..., W_j$ u vezi sa $U_1,..., U_j$, a $X_1,..., X_k$ sa $V_1,..., V_k$, kao što je opisano u lemi. Treba da dokažemo da

$W_1,..., W_j, X_1,..., X_k \vdash B \rightarrow C$

jeste derivabilno. Sada iz niza dokaza datih sekvenata možemo brzo obrazovati, uz pomoć koraka &I zajedno sa ponovnim prebrojavanjem onih redova gde je to neophodno, dokaz za

$W_1,..., W_j, X_1,..., X_k \vdash B \& C$.

Korak na osnovu SI, uz pomoć 2.4.1(a) (P & Q $\vdash$ P –> Q), pruža željeni sekvent.

(*b*) Pretpostavimo da je B=T, a C=F. Tada je B –> C = F. Sada imamo kao derivabilno

$W_1,..., W_j \vdash B$

i

$X_1,..., X_k \vdash \neg C$

i treba da dokažemo da je

$W_1,..., W_j, X_1,..., X_k \vdash \neg(B -> C)$

derivabilno. Biće dovoljan korak &I, kao što je to bilo u (*a*), koji sledi na osnovu SI pomoću 2.2.5(g) (P & ¬Q ⊢ ¬(P –> Q)).

(*c*) Slično sa (a) i (b), pomoću SI sa 2.4.1(b)

(*d*) Slično sa (a) i (b), pomoći SI sa 2.4.1(c).

(iii) B&C. Imamo četiri slučaja kao u (ii), i koristimo isto beleženje.

(*a*) Pretpostavimo da je B=T i C=T. Tada je B & C = T. Korak &I je dovoljan da dobijemo, iz

$W_1,..., W_j \vdash B$

i

$X_1,..., X_k \vdash C,$

$W_1,..., W_j, X_1,..., X_k \vdash B \& C$

(*b*) Pretpostavimo da je B=T i C=F. Tada je B & C = F. Upotrebi &I i SI sa 2.4.1(d) da bi dobio ¬(B & C) iz B & ¬C.

(*c*) Slično sa (*b*), pomoću SI sa 2.4.1.(e).

(*d*) Slično sa (*b*), pomoću SI sa 2.4.1.(f).

(iv) BvC. Četiri moguća slučaja su redom obuhvaćena upotrebom SI zajedno sa 1.3.1(e), 2.4.1(g), 2.4.1(h) i 1.5.1(f), već prema tome o kojem je od slučajeva reč.

(v) B <–> C. Četiri moguća slučaja su redom obuhvaćena upotrebom SI zajedno sa 2.4.1(i)-(l).

(α) i (β) zajedno pokazuju da u našim dokazima možemo podražavati korake istinosno - tabličnog vrednovanja wff za data pripisivanja njenim varijablama. Uzmi ponovo primer koji sledi stav leme. S obzirom na (α) možemo derivirati sva tri sekventa

$\neg P \vdash \neg P$

$Q \vdash Q$

$\neg R \vdash \neg R.$

Za dato pripisivanje ´¬Q´ uzima vrednost F, odakle po (*β*) (i) možemo obrazovati dokaz za

$$Q \vdash \neg\neg Q.$$

Za dato pripisivanje ´¬Q v R´ uzima vrednost F, odakle po (*β*) (iv) možemo obrazovati iz datih dokaza dokaz za

$$Q, \neg R \vdash \neg(\neg Q \lor R).$$

Konačno, za dato pripisivanje ´¬P –> ¬Q v R´ uzima vrednost F, odakle po (*β*) možemo iz datih dokaza obrazovati dokaz za

$$\neg P, Q, \neg R \vdash \neg(\neg P \to \neg Q \lor R),$$

što je sekvent koji je trebalo derivirati u skladu sa lemom. Stoga i (*α*) i (*β*) zajedno mogu biti tako shvaćeni da lemi pružaju punu opštost.

Da bi se dokazala Metateoreme II iz leme, neka A sada bude *tautološka* wff, koja sadrži varijable $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Pošto je A tautološka, ona dobija vrednost T za *sva* pripisivanja njenih varijabli, odakle, po lemi, možemo derivirati *sve* sekvente čiji je obrazac

$$W_1, \ldots, W_n \vdash A,$$

pri čemu su $W_1, \ldots, W_n$ negirani ili ne-negirani oblici varijabli $V_1, \ldots, V_n$. Postojaće 2^n takvih sekvenata, koji odgovaraju broju od 2^n mogućih pripisivanja.

Primer: ´P & Q –> P´ je tautologija, odakle po lemi možemo derivirati sva četiri sekventa

(i) $P, Q \vdash P \& Q \to P$
(ii) $P, \neg Q \vdash P \& Q \to P$
(iii) $\neg P, Q \vdash P \& Q \to P$
(iv) $\neg P, \neg Q \vdash P \& Q \to P$.

Da bismo obrazovali dokaz za A kao teoremu, počinjemo uz pomoć *n* koraka TI, uvodeći sukcesivno $V_1 \lor \neg V_1$, $V_2 \lor \neg V_2, \ldots, V_n \lor \neg V_n$ (Teorema 44). Tada, pomoću niza koraka vE, dobijamo V_1, $\neg V_1$, V_2, $\neg V_2, \ldots, V_n$, $\neg V_n$. Pomoću SI primenjenog 2^n puta, koristeći 2^n sekvenata dobijenih iz leme, dobijamo konkluziju iz različitih asumpcija od kojih se ti

sekventi sastoje. Konačno, sukcesijom koraka[6] vE, posledično dobijamo A koja ne počiva ni na jednoj od asumpcija, tj. kao teoremu. To dokazuje datu metateoremu.

Nastavak primera. U slučaju 'P & Q –> P' opisani dokaz sledi ovako:

	(1)	P v ¬P	TI 44
	(2)	Q v ¬Q	TI(S) 44
3	(3)	P	A
4	(4)	¬P	A
5	(5)	Q	A
6	(6)	¬Q	A
3,5	(7)	P & Q –> P	3,5 SI(i)
3,6	(8)	P & Q –> P	3,6 SI(ii)
4,5	(9)	P & Q –> P	4,5 SI(iii)
4,6	(10)	P & Q –> P	4,6 SI(iv)
5	(11)	P & Q –> P	1,3,7,4,9 vE
6	(12)	P & Q –> P	1,3,8,4,10 vE
	(13)	P & Q –> P	2,5,11,6,12 vE

Iz ovoga primera će biti jasno[7] zašto uopšte koraci vE postepeno smanjuju broj asumpcija na kojima A počiva sve dotle dok, nakon što je poslednji slučaj substitucije zakona isključenja trećeg upotrebljen, nije preostala više nijedna asumpcija.

Metateorema III: Svi tautološki sekventi su derivabilni.

Dokaz. Neka $A_1,...,A_n \vdash B$ bude tautološki sekvent. Tada znamo da je njen odgovarajući kondicional

$$A_1 \text{ –> } (...(A_n \text{ –> } B)...)$$

takođe tautološki (vidi odeljak 4). Otuda po Metateoremi II ovaj kondicional može biti deriviran iz naših pravila kao teorema. Prema tome, možemo derivirati dati sekvent na sledeći na-

6 Zapravo, o kolikom broju koraka je reč? Pronicljiv student trebalo bi da se saglasi sa tim da će $2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 1$ biti sasvim dovoljno.

7 Da bismo izbegli mogući nesporazum: naravno da se 'P & Q → P' može dokazati i bez ove gužve; ona je ovde naprosto uzeta kao *ilustracija* tautologije za dve promenljive 'P' i 'Q' - taj zadatak bi sa istim uspehom mogla da obavi i bilo koja druga, ma kako da je dugačka i problematična.

čin. Prvo, uzmimo A_1,..., A_n. Pomoću TI, uvodi se odgovarajući kondicional kao novi red. Pomoću *n* koraka MPP-a, dobijamo B kao konkluziju iz A_1,..., A_n, derivirajući tako željeni sekvent.

Korolar I: Bilo koji sekvent derivabilan je ako i samo ako je tautološki.

Ovaj Korolar jednostavno objedinjuje Metateoreme I i III.

Kažemo da je logički sistem, takav kao što je to iskazni račun, *kompletan* ako su svi izrazi određene vrste derivabilni unutar njega. Ako, posebno, odredimo *tautološke* sekvent-izraze, tada iz Metateoreme III odmah dobijamo

Korolar II: Iskazni račun je kompletan.

Poredeći prethodni odeljak sa ovim, moramo zapaziti da je za rezultat *konzistencije*, takav kakav je postignut u Odeljku 4, tipično to da su derivabilni *jedino* izrazi određene vrste (u slučaju iskaznog računa, samo tautološki sekvent-izrazi), dok je za rezultat *kompletnosti*, takav kakav je neposredno postignut, tipično to da su *svi* izrazi odredjene vrste derivabilni. Uzeta zajedno, kao gore u slučaju Korolara I, vidimo da naša pravila derivacije nisu otišla predaleko, ali da su ipak otišla dovoljno: naša nam pravila omogućuju da deriviramo *upravo* tautološke sekvente.

Tako se dva vrlo različita pristupa iskaznom računu, pristup putem derivacije i pristup putem istinosne tablice, na kraju susreću. Pomoću istinosnih tablica, izdvajamo tautološke od ostalih sekvenata; pomoću derivacije, izdvajamo derivabilne sekvente; međutim, bilo kojim od ovih puteva da pođemo dolazimo na kraju do istog totaliteta sekvenata. Ovo može probuditi sumnju u korisnost pristupa putem derivacije. Zbog toga što je, kao što smo rekli, provera putem istinosne tablice sasvim mehanička: šta nas to suočava sa potragom za dokazima, kada isti posao može biti učinjen mehaničkim sredstvima?

Postoji nekoliko odgovora koje možemo pružiti. Prvo, čak na nivou iskaznog računa, u primeni metod istinosne tablice postaje suviše naporan kada su u pitanju četiri ili više varijabli; često je lakše tragati za dokazom, kada sumnjamo da li je sekvent tautološki. Drugo, redovi dokaza u mnogim slučajevima slede metod rasuđivanja koji mi obično i nesvesno primenjujemo (zbog ovog razloga naš pristup putem derivacije se ponekada naziva *prirodna dedukcija*), dok provera putem istinosne tablice

ima u izvesnoj meri veštački karakter. Treće, ako imamo bilo kakve osnove u zahtevu za *odbacivanjem* tautologije kao nelogičkog načela (na primer, zakon isključenja trećeg često je bio dovođen u pitanje od strane filozofa), tada eksplicitan dokaz iz naših pravila iznosi na videlo od čega treba odustati i šta se sme zadržati kada je reč o takvom odbacivanju, što nije slučaj sa proverom putem istinosnih tablica. Naš pristup pomoću pravila izvesnim delom pokazuje *međuzavisnost* rezultata, dok se provera putem istinosnih tablica primenjuje na svaki sekvent-izraz nezavisno.

Međutim, na mnogo složenijim nivoima logike, kao što je predikatski račun na koji ćemo doći u sledeća dva poglavlja, pristup putem istinosne tablice gubi tlo; zaista poznato je da nema mehaničkog sredstva za ispitivanje izraza na ovom nivou kao validnih i invalidnih. Stoga smo na tom mestu *primorani* da koristimo druge tehnike. Mi ćemo u stvari preuzeti pravila derivacije iskaznog računa, proširujući ih u pravcu novih zahteva i pridodajući im druge. Iskazni račun je stoga atipičan: zbog njegove neposredne jednostavnosti njime se može rukovati mehanički. To nije slučaj sa drugim logičkim sistemima u kojima složenost, kao što je to u samoj matematici, proveravanje čini postupkom koji predstavlja imaginativan proces.

POGLAVLJE 3

RAČUN PREDIKATA I

1 Logička forma: 'svi' i 'neki'

Naša je namera (uporedi Odeljak 1, Glava 1) da tačno utvrdimo uslove validne argumentacije; da bi čitalac bio podstaknut na odgovarajući stepen pregora, vreme je da se uvidi koliko se malo za sve ovo vreme postiglo.

Razmotrimo dva argumenta

(1) Ako je on kod kuće, njegov šešir će biti u hodniku; njegov šešir nije u hodniku; prema tome on nije kod kuće.
(2) Ako je Napoleon bio Kinez, bio je Azijat; on nije bio Azijat; onda nije bio Kinez.

Uz pomoć iskaznog računa, odmah vidimo da su oba argumenta zasnovana, otuda što kao zajednički obrazac imaju

(3) $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

za koji možemo pokazati da je derivabilan sekvent. Mnogi od do sada deriviranih sekvenata na ovaj način prikazuju obrazac, ili logičku formu, sasvim blisku svakodnevnim argumentima. Ali postoji mnogo, podjednako bliskih, argumenata koji su bez sumnje zasnovani, ali čija zasnovanost nije u potpunosti razgovetna s obzirom na naše sadašnje metode. Podsetiću čitaoca na dva argumenta koja su data na početku knjige:

(4) Cvrčko je crvendać; nijedan crvendać nije selica; Cvrčko nije selica.
(5) Kiseonik je element; nijedan element nije molekularan; prema tome kiseonik nije molekularan.

Složili smo se da kao i (1) i (2) tako i (4) i (5) imaju nešto zajedničko što nazivamo njihovom logičkom formom; ali uz pomoć notacije iskaznog računa, jedini sekvent kojima ih možemo zabeležiti jeste

(6) P, Q ⊢ R,

sekvent koji je bespomoćno invalidan.

Poređenje (1) i (2) sa (4) i (5) nije dobro. Kod (1) i (2) prepoznajemo konkluziju argumenata kao negaciju iskaza koji se pojavljuju kao antecedent prve premise i prepoznajemo drugu premisu kao negaciju konsekventa prve; ovo uviđanje upućuje na obrazac (3). Ali kod (4) i (5) ne postoji takvo naknadno poistovećivanje iskaza, dve premise i konkluzija su svi redom različiti, tako da sve što možemo zabeležiti jeste (6). Ukoliko (4) i (5) imaju osnove, onda je to tako tek s obzirom na *unutrašnju strukturu* iskaza, dok je za prikaz osnovanosti (1) i (2) dovoljno da se utvrde iskazi kao celine, bez razabiranja unutar njih. Iskazni račun daje uvid u validnost onda kada to zavisi od *same* iskazne strukture; naše celine, na tom nivou, su iskazi za sebe. Očito je da ono što nam sada treba, ukoliko nastavljamo dalje traženje za validnim uslovima, jesu oruđa koja nam omogućuju da razotkrijemo iskaze, da iznesemo na uvid njihovu unutrašnju strukturu. Ova oruđa pružena su u *predikatskom računu*, koji je predmet ovog i sledećeg poglavlja.

Kada smo maločas dotakli (4) i (5) postigli smo sledeću delimičnu analizu njihove zajedničke logičke forme:

(7) *m* ima svojstvo F; ništa sa F nema svojstvo G; prema tome *m* nema G.

Očito je da će nam u našem novom formalnom jeziku trebati posebni simboli da bismo zamenili vlastita imena ('Cvrčko', vlastito ime ptice; 'kiseonik', vlastito ime hemijskog elementa). Iskoristimo onda '*m*', '*n*',..., u ovu svrhu, kao u (7). Takođe će nam trebati simboli da zamenimo izraze-svojstva ili predikate ('je crvendać', 'je selica', 'je element', 'je molekularan'). Iskoristićemo velika slova 'F', 'G', 'H',..., opet kao u (7), '*m*', '*n*', ..., zvaćemo *vlastita imena*, 'F', 'G', ..., zvaćemo *predikatska slova*.

Da bismo rekli kako m ima svojstvo F, saglasni smo sa tim da simbole 'F' i '*m*' pridružujemo ovim redom. Pišemo

F*m*.

'F*m*' tako postaje naš obrazac za mnoge proste rečenice koje imaju vlastita imena kao subjekte: 'Sokrat je smrtan', 'Napoleon je bio Kinez', 'hrabrost je poželjna' i tako dalje.

Reći da *m* nema G sada je lako: da bismo rekli da *m* ima G pišemo 'G*m*', dok za '*m* nema G' pišemo

$$\neg Gm,$$

pozajmljujući, dozvolićemo sebi slobodu da to učinimo, simbole iz iskaznog računa koji smo do sada razvili.

Tako smo se snabdeli za prvu premisu i za konkluziju iz (7), ali smo ostavljeni bez simbola za izraz 'ništa' u drugoj premisi. Mogli bismo jednostavno uvesti simbol (recimo 'E') za njega i pisati 'E(FG)' za 'ništa sa F nema G'; u većoj ili manjoj meri ova je taktika prihvaćena u tradicionalnoj logici, koja vodi poreklo od Aristotela[8]. U savremenoj logici je upotrebljena prijemčljivija i suptilnija zamisao, koju je, međutim, teže naučiti. Problemu obično prilazimo ispitujući pre prvo 'sve', nego 'ništa'.

Iz 'nijedan crvendać nije selica', dobijamo 'ništa sa svojstvom biti crvendać nema svojstvo biti selica'. Slično, iz 'svi crvendaći su selice' ili 'svaki crvendać je selica' dobijamo 'sve sa svojstvom biti crvendać ima svojstvo biti selica'. Koristeći 'F' i 'G' u ranijem smislu, imamo

(8) Sve sa F ima G.

Korak koji sada moramo učiniti jeste da uvidimo da se (8) svrstava u vrstu *kondicionala*, naime:

(9) Sve, *ako* to ima F, ima G,

ili možda bolje,

(10) Uzmi bilo šta: tada ako to ima F, to ima i G.

Reći da sve što ima F ima G znači reći za *bilo koji objekat ma šta da je* da ako on ima F on ima i G. Reći da su svi crvendaći migranti znači reći da kojeg god objekta da se latiš - ako je on crvendać tada je on selica[9].

---

8 Za potpunije razmatranje vidi Poglavlje 4, Odeljak 4.

9 Evo 'dokaza'. Pretpostavi, kao prvo, da su svi crvendaći selice i proizvoljno izaberi neki objekat, recimo stog sena. Tada je o stogu sena istina da ako je on crvendać - da je onda selica. Obrnuto, pretpostavi da nisu svi crvendaći selice. Tada neki crvendaći nisu selice. Izaberi jednoga: tada za taj objekat u krajnjoj liniji nije istina da ako je crvendać da je onda selica. Na ovaj način uopšte vidimo da je (8) istinito i lažno u sasvim istim okolnostima kao i (9) i (10).

(9) i (10) možemo simbolički izraziti preuzimajući iz algebre odgovarajuću zamisao o *varijablama*, '*x*', '*y*', '*z*',... Umesto (9) prvo pišemo

(11) Za bilo koje *x*, ako *x* ima F, onda *x* ima G.

'*x* ima F' prirodno skraćujemo na 'F*x*', '*x* ima G' slično tome na 'G*x*', a za 'ako...onda...' koristimo '–>' kao ranije. To daje

(12) Za bilo koje *x*: F*x* –> G*x*.

Na kraju prihvatamo da 'za bilo koje *x*' pišemo tako što obuhvatamo '*x*' zagradama i dobijamo, kao prvu simboličku verziju (8),

(13) (*x*)(F*x* –> G*x*).

Potpuna preimućstva preuzimanja zamisli o varijablama postaće sve jasnija što dalje budemo napredovali. Za trenutak će biti dovoljno da o njima razmišljamo kao o nečemu što ima ulogu donekle sličnu zamenici 'to'. Kada poredimo (11) sa (10) zapažamo da '*x*' u (11) zapravo ima dvaput zamenjeno 'to' iz (10). Skraćivanje '(*x*)' za 'Za bilo koje *x*' koje se pojavljuje u (13) naziva se *univerzalni kvantifikator*.

Tako 'Sve sa F ima G' postaje '(*x*)(F*x* –> G*x*)'. Ali šta sada sa 'ništa sa F nema G'? Razmatranje pokazuje da reći da *ništa* sa F nema G jeste isto što i reći da *svemu* sa F *nedostaje* G, ili, u eksplicitno kondicionalnoj formi

(14) Uzmi bilo šta: tada ako to ima F, to nema G.

Ovo opet postaje

(15) Za bilo koje *x*: F*x* –> ¬G*x*

i

(16) (*x*)(F*x* –> ¬G*x*)

od kojih ovo poslednje ima u potpunosti simboličko ruho.

Kao složeniji primer, pretpostavimo da želimo da analiziramo

(17) Nema ljudi koji su i doktori i trgovci ribom.

Da bismo dobili oblik koji je u terminima svojstava, prvo pišemo

(18) Ništa sa svojstvom biti čovek nema svojstvo biti i doktor i trgovac ribom.

Neka F bude svojstvo biti čovek, G svojstvo biti doktor, a H svojstvo biti trgovac ribom, tada dobijamo

(19) Ništa sa F nema i G i H,

a time i

(20) Uzmi bilo šta: tada ako to ima F to nema i G i H,

odakle dalje imamo

(21) Za bilo koje x: Fx –> ¬(Gx & Hx),

odakle dalje imamo

(22) (x)(Fx –> ¬(Gx & Hx)).

Ideja o univerzalnom kvantifikatoru nam omogućuje da mnoge rečenice razvrstamo uz pomoć logičke notacije onako kako se one pojavljuju u argumentima, koje sadrže takve reči kao što su 'svi' 'svaki', 'bilo koji', 'sve', a takođe i 'ne', 'nijedan', 'ništa'. Međutim, sledeća grupa idioma, koja igra veliku ulogu u situacijama rasuđivanja, jeste grupa koja je usredsređena na 'neko'. Na primer, uzmi osnovni argument

(23) Svi Nemci su veseljaci; neki lupeži su Nemci: prema tome, neki lupeži su veseljaci.

Ako stavimo 'F' namesto biti lupež, 'G' za biti Nemac, 'H' za biti veseljak, tada prva premisa očito biva izražena pomoću '(x)(Gx –> Hx)'. Međutim, nejasno je kako bismo obradili drugu premisu i konkluziju. Možemo to shvatiti i tako da reći da su neki lupeži Nemci je isto što i reći da nije slučaj da nijedan lupež nije Nemac. Ako 'nijedan lupež nije Nemac' postaje '(x)(Fx –> ¬Gx)', tada 'nije slučaj da nijedan lupež nije Nemac' postaje '¬(x)(Fx –> ¬Gx)'. Zbog toga što i ovde *možemo* obraditi 'neki' uz pomoć univerzalnog kvantifikatora.

Mada je ova analiza savršeno ispravna, ona dokazuje da je mnogo pogodnije za obradu argumenata pronaći poseban simbol koji bi se odnosio na 'neki': *egzistencijalni kvantifikator*.

Kao što

'(x)(...)'

znači 'za bilo koje x tada ...', tako pišemo

'$(\exists x)(...)$'

sa značenjem 'postoji neko x takvo da ...' ili 'može se naći objekat x koji ...', '$(\exists x)(...)$' tvrdi da barem jedna stvar je takva da ... Reći posle svega da su neki lupeži Nemci, znači što i reći da bar jedan objekat može biti pronađen da on ima *i* svojstvo F *i* svojstvo G[10]. Uopšteno govoreći, reći da

(24) nešto sa F ima G

je isto što i reći da nešto ima i F i G, i tako postaje

(25) postoji x takvo da x ima F i x ima G,

ili, u sasvim simboličkom obličju,

(26) $(\exists x)(Fx \ \& \ Gx)$.

Sledeći oblik reči dovoljno sveprisutan da zahteva da se posebno spomene jeste 'nešto sa F nema G' ili 'postoji nešto sa F, a ne sa G' ('neki Francuzi nisu velikodušni', 'postoje Francuzi koji nisu velikodušni'). Ovo očigledno postaje 'postoji x takvo da x ima F i x nema G', ili

(27) $(\exists x)(Fx \ \& \ \neg Gx)$.

Uobičajena je greška razvrstati 'Neki Francuzi su velikodušni' pre pomoću '$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$' nego ispravnim '$(\exists x)Fx \ \& \ Gx)$', na osnovu analogije sa slučajem 'Svi Francuzi su velikodušni' koje je kao vrsta kondicionala razvrstano na odgovarajuć način. Ali '$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$' tvrdi da postoji nešto što, *ako* je Francuz, tada je to velikodušno. A to će biti istinito čak i ako ne postoji *nijedan* Francuz, dok 'neki Francuzi su velikodušni' to svakako nije.

Zadatak prevođenja u notaciju koje koristi kvantifikatore mogao bi se ovako sumirati: *prvo*, unutar rečenice treba razvrstati svojstva i pronaći predikatska slova za ta svojstva; *drugo*,

10 U logici uvek uzimamo da 'neki' znači 'bar jedan'. Tako 'neki lupeži su Nemci' biće shvaćeno kao istinito ako postoji barem jedan nemački lupež, a takođe istinito i ako su svi Nemci lupeži. Vidi Poglavlje 4, Odeljak 3, za način obrazovanja izraza 'barem dva'.

treba uvesti varijable; *treće*, treba uvesti veznike iskaznog računa i kvantifikatore. Četiri najopštija oblika, nakon što je upotpunjen prvi korak, zajedno sa njihovim konačnim prevodima, prikazana su na sledećoj tabeli:

Sve sa F ima G	Ništa sa F nema G
(x)(Fx —> Gx)	(x)(Fx —> ¬Gx)
Nešto sa F ima G	Nešto sa F nema G
(∃x)(Fx & Gx)	(∃x)(Fx & ¬Gx)

Tradicionalna logika imala je uvid u ova četiri oblika iskaza. Ali ne i dalje od toga. Njeno najveće ograničenje (sem možda same činjenice potpunog nedostatka uvida u iskazni račun) jeste upravo nedostatak izražajnih moći za ostale raznovrsnosti. Glavni doprinos kvantifikacijskog načina beleženja kombinovanog sa varijablama i predikatskim slovima je u tome što u ogromnoj meri povećava naše moći u analizi rečenica. Na prvom mestu, možemo baratati *relacijama* sa podjednakim uspehom kao i svojstvima. Uzmimo 'Princ Philip je roditelj princa Charlesa'. Za razliku od, recimo, 'Princ Philip je velikodušan', što obeležavamo sa 'Gm' (koristeći 'm' za 'princ Philip'), nova rečenica sadrži dva imena i njome se tvrdi pre relacija između dva objekta nego samo svojstvo jednog. Upotrebimo 'n' za 'princ Charles': tada možemo napisati 'Rmn' kao skraćenicu za 'm je roditelj od n'. 'Rmn' će biti istinito, ali će 'Rnm' (Princ Charles je roditelj princa Philipa') biti lažno. Zato što kada dva vlastita imena slede predikatsko slovo - poredak postaje materijalan.

Predikatsko slovo koje prati jedno ime izražava svojstvo; predikatsko slovo koje prate dva imena izražava relaciju. Primeri relacionih rečenica u običnom jeziku kojima na ovaj način možemo da rukujemo jesu: 'm voli n', 'm je veće od n', 'm je južno od n', 'm je tetka po majci od n'. Tranzitivni glagoli (barem onda kada ih slede objekti), pridevi u komparativnom obliku, izrazi medjusobno zavisnih položaja i termini za porodične odnose, između ostalih, najčešće izražavaju ili se pak događaju u relacionim izrazima.

Na drugom mestu, možemo kombinovati ovu proširenu upotrebu predikatskih slova sa kvantifikatorima. Pretpostavimo za

trenutak da naše varijable 'x', 'y', 'z', obuhvataju *ljude* (kao što su u algebri shvaćene tako da obuhvataju brojeve), tako da 'sve' možemo čitati 'svaki' a 'nešto' 'neki'. Dajući za 'Rmn' tumačenje 'm je roditelj od n', 'Princ Charles ima roditelja' tada to možemo izraziti pomoću

(28) $(\exists x)\mathrm{R}xn$

pri čemu je n princ Charles; ovo nam samo kaže da je neko roditelj princa Charlesa. Reći da princ Philip ima dete pišemo kao

(29) $(\exists x)\mathrm{R}mx$,

gde je m princ Philip, što govori da postoji neko kome je princ Philip roditelj. I ovde je poredak od suštinskog značaja, jer sa istim tumačenjem $(\exists x)\mathrm{R}nx$ je ('postoji neko kome je princ Charles roditelj') u trenutku zapisivanja lažno, dok je (28) istinito. Slično tome, $(\exists x)\mathrm{R}xm$, mada istinito kao i (29), tiče se pre predaka princa Philipa nego njegovog potomka.

Na trećem mestu, možemo kombinovati univerzalni i egzistencijalni kvantifikator u istoj rečenici. '$(\exists x)\mathrm{R}xn$' kaže za princa Charlesa da on ima roditelja. Pretpostavimo da želimo da kažemo da *svako* ima roditelja. Prirodno je da napišemo

(30) $(y)(\exists x)\mathrm{R}xy$

('za bilo koje y: postoji x takvo da x je roditelj od y'). Ovo se svakako mora pažljivo razlikovati od

(31) $(y)(\exists x)\mathrm{R}yx$

koje pre tvrdi da je svako nekome otac, što je uopštavanje u odnosu na koje postoje očiti izuzeci. Isto je od suštinskog značaja zapaziti da je poredak *kvantifikatora* ovde odlučujući kako za smisao tako i za poredak 'x' i 'y'. Pošto

(32) $(\exists y)(x)\mathrm{R}yx$

tvrdi sa očitom neistinitošću da je neko svakome roditelj, a

(33) $(\exists y)(x)\mathrm{R}xy$

tvrdi da je nekome svako roditelj, što je više nego očigledno lažno.

U ova poslednja četiri primera upotreba *različitih* (distinct) varijabli 'x' i 'y' je suštinska za željeni smisao. Zato bi reći

´$(\exists x)Rxx$´, bilo isto što i reći da je neko svoj sopstveni roditelj, dok reći ´$(x)Rxx$´ bi bilo isto što i reći da je svako sam sebi roditelj. Da bi izrazili (30) bez upotrebe varijabli trebalo bi nam ´za svaku osobu postoji osoba takva da je ona (ova potonja) njen roditelj (ove pređašnje)´, različite varijable nam omogućuju da na jednostavan način rukujemo sa ´pređašnji´ i ´potonji´, što opet sugeriše sličnost izmedu varijabli i zamenica.

Nema razloga da se iza predikatskog slova zaustavimo na *dva* imena ili varijable. Da bismo razvrstali, na primer, ´Oxford je izmedu Londona i Stratforda´ koristeći ´*m*´ za ´Oxford´, ´*n*´ za ´London´ i ´*o*´ za ´Stratford´ a ´I´ za relaciju biti između, možemo napisati I*mno*. Zapravo, u ovoj knjizi mi ćemo se retko baviti relacijama koje zahtevaju uvodenje više od dva objekta. Ali teorijski, naša predikatska slova može slediti bilo koji (konačni) broj imena ili varijabli.

Završavam ovaj odeljak sa sledećim ilustracijama kvantifikatorskog prevođenja u postupno sve složenijim slučajevima.

Razmotrimo

(34) Svaki mladić voli određenu devojku[11].

Ovde zapažamo dvosmislenost: to može značiti (i) da postoji neka (vrlo srećna) devojka koju voli svaki mladić; ili (ii) da se za svakog mladića može pronaći neka (uz malo sreće, različita) devojka koju on voli. Za svaku verziju dobijamo različito razvrstavanje (dodatna prednost kvantifikatorskog beleženja je u tome što čini eksplicitnom ovu vrstu dvosmislenosti). Upotrebi ´M´ za svojstvo biti mladić, ´D´ za svojstvo biti devojka i ´V´ za relaciju voleti. Tada (i) postaje ´postoji x takvo da Dx i x voli svaki mladić´. Rasporedivši ´x voli svaki mladić´, mi ga shvatamo kao ´svaki mladić voli x´ - ´za svako y, ako je y momak tada y voli x´. Odatle, povezujući ova dva dela, imamo

(35) $(\exists x)\ (Dx\ \&\ (y)(Mx \rightarrow Vyx))$.

Na drugoj strani (ii) postaje ´za svako x, ako Mx onda x voli neku devojku´, a da bismo rekli ´x voli neku devojku´ kažemo ´postoji y takvo da Dy i x voli y´. Odatle imamo za (ii)

(36) $(x)(Mx \rightarrow (\exists y)(Dy\ \&\ Vxy))$.

---

[11] Ovaj privlačan primer dugujem g. Peteru Geachu.

Konačna struktura (i) je 'nešto sa D ima H'; ali H je ovde složeno svojstvo biti voljen od strane svakog momka. Međutim, konačna struktura (ii) jeste 'sve sa M ima H', gde je H sada složeno svojstvo voleti neku devojku. (35) i (36) trebalo bi pažljivo uporediti i staviti jedno naspram drugog.

Razmotrimo zatim

(37) Svi zdravi psi vole kost.

Ovde se može zapaziti sledeća dvosmislenost: (i) da, za svako x, ako je x zdrav pas tada x voli *neku* kost, ili (ii) da, za svako x, ako je x zdrav pas tada x voli *bilo koju* kost. Ako tada u (i) upotrebimo Z za biti zdrav, P za biti pas, a K za biti kost, imamo

(38) $(x)\ (Zx\ \&\ Px \rightarrow (\exists y)(Ky\ \&\ Vxy))$.

Ako je u pitanju (ii), sa druge strane, tada imamo

(39) $(x)\ (Zx\ \&\ Px \rightarrow (y)(Ky \rightarrow Vxy))$.

(Mada ja sumnjam da (37) stvarno znači (ii)).

Događanje konjunkcije kao antecedenta kondicionala, kao u (38) i (39), tipično je za analizu 'svi'- rečenica sa zavisnim sporednim rečenicama koje su pridružene njihovim gramatičkim subjektima. Odatle 'sve sa F koje ima G ima H' postaje

(40) $(x)(Fx\ \&\ Gx \rightarrow Hx)$.

Fraze sa 'osim' obično zahtevaju sličan tretman. Tako 'svi psi osim čivava vole hladnoću' postaće

(41) $(x)(Px\ \&\ \neg Čx \rightarrow Vx)$

pri čemu će 'P' stajati za biti pas, 'Č' za biti čivava, a 'V' za voleti hladnoću. Zato što 'psi osim čivave' znači 'psi *koji nisu* civave'.

Reč 'bilo koji' uvek će zahtevati oprez. Na početku rečenice 'bilo koji' igra obično istu ulogu kao i 'svaki', i može se upotrebiti u skladu sa tim. Ali 'John ne voli bilo koju devojku' znači, naravno, 'John ne voli *nijednu* devojku' i postaje

(42) $(x)(Dx \rightarrow \neg Vmx)$

pri čemu je 'D' uzeto za biti devojka, V za relaciju voleti, a '*m*' za Johna.

Pažljivo treba obično promisliti i kada je prisutno 'jedino'.

Reći da su jedino ljudi oni koji piju viski znači reći da, za svako x, jedino ako je x čovek tada je x onaj koji pije viski, što opet znači reći da, za svako x ako je x onaj koji pije viski onda je x čovek ('jedino ako P onda Q' je ekvivalentno sa 'ako Q onda P'), što naravno znači reći da svi oni koji piju viski jesu ljudi. Uopšteno govoreći 'Jedino stvari sa F imaju G' znači 'Sve sa G ima F'. Odatle, 'Jedino ljudi koji jedu šnicle od oraha su vegetarijanci', postaje

(43) $(x)(Vx \rightarrow Ljx \,\&\, Jx)$,

pri čemu 'V' stoji za biti vegetarijanac, 'Lj' za biti čovek, a 'J' za jesti šnicle od oraha: zbog toga što to znači isto što i 'svi vegetarijanci su ljudi koji jedu šnicle od oraha'. Sa druge strane, '*jedini* ljudi koji jedu šnicle od oraha jesu vegetarijanci' znači '*svi* ljudi koji jedu šnicle od oraha su vegetarijanci', i ono postaje

(44) $(x)(Ljx \,\&\, Jx \rightarrow Vx)$.

Ovo važi barem u onoj meri u kojoj se zasniva na jednostavnom prisustvu izraza koji je određen (odnosno, u engleskom, pred kojim stoji određena zamenica 'the'/prim. prev./).

Za prevođenje sa rečenica običnog jezika na rečenice predikatskog računa neophodna je fleksibilnost duha uopšte. Nije moguće dati nijedno nepokolebljivo pravilo i neophodno je iskustvo pre postizanja potpunog ovladavanja kvantifikatorima. Prevođenje jeste jedna od neophodnih delatnosti, ali formalni jezik na koji se vrši prevođenje pre bi se moglo reći da ima različitu sintaksu od sintakse prirodnog jezika i ima tek ograničenu terminologiju - logičke veznike, varijable, vlastita imena, predikatska slova i dva kvantifikatora. Glavna je prednost ovog jezika u tome što uprkos njegovim ograničenjima u notaciji ima vrlo široku izražajnu snagu, što će postati jasnije kako budemo dalje napredovali.

Zaključni deo o terminologiji pojednostaviće nešto iz diskusije koja sledi: saglasimo se sa tim da iskaz koji tvrdi da bilo koji takav-i-takav objekat jeste slučaj, nazivamo *univerzalni iskaz*, univerzalni iskaz će biti izražen u računu predikata rečenicom sa početnim univerzalnim kvantifikatorom; i saglasimo se sa tim da iskaz koji tvrdi da jeste slučaj da postoji takav-i-takav objekat, nazivamo *egzistencijalni iskaz*, egzistencijalni iskaz će biti izražen u našem simbolizmu pomoću rečenice sa početnim egzistencijalnim kvantifikatorom.

V e ž b a:

1 Prikaži logički oblik sledećih rečenica pomoću prevođenja u notaciju predikatskog računa (koristeći za predikatska slova i vlastite imenice predložena slova):

(a) Tobby je mačka. ('M','m')
(b) Skitko nije mačka. ('M','m')
(c) Neka jagnjad su ostrižena. ('J','O')
(d) Sva jagnjad su ostrižena. ('J','O')
(e) Jedino jagnjad su ostrižena. ('J','O')
(f) Nijedan pas nije ostrižen. ('P','O')
(g) Neki psi nisu ostriženi. ('P','O')
(h) Mrvica je ostrižen pas. ('P','Q','m')
(i) Brut je ubio Cezara. ('U','m','n')
(j) Neko je ubio Cezara. ('U','n')
(k) Brut je nekog ubio. ('U','m')
(l) Neko je ubio nekog. ('U')
(m) Neko se ubio. ('U')
(n) Niko se nije ubio. ('U')
(o) Neko je sve ubio. ('U')
(p) Nekog su svi ubili. ('U')
(q) Postoji grad između Londona i Straforda. ('G','I','m','n')
(r) Svaka žena je vlasnik psa. ('Ž','P','V')
(s) Neke devojke vole sve sportove. ('D','V','S')
(t) Svaki mudar glasač ubacuje kuglicu. ('M','G','U','K')
(u) Svaki od glasača ubacuje mudru kuglicu. ('G','U','M','K')
(v) Tom voli individualne sportove. ('m','V','I','S')
(w) Neke devojke vole brze sportove. ('D','V','B','S')
(x) Neki momci vole jedino brze sportove. ('M','V','B','S')
(y) Neke devojke ne vole nijedan brzi sport. ('D','V','B','S')
(z) Neki momci vole jedino sportove koji nisu brzi. ('M','V','S','B')

Oprez: Neke od rečenica koje se nalaze pri kraju su dvosmislene i iziskuju alternativna razvrstavanja.

2 Univerzalni kvantifikator

Poslednji odeljak pružio je preliminarnu skicu novog formalnog jezika; sada se možemo vratiti na stvar tako što ćemo proveriti

argumente koji su u njemu izraženi. Pošto je iskazni račun tek deo našeg jezika, u predikatski račun prenosimo iskazne veznike i iskazne varijable u meri u kojoj su nam neophodni - sva naša ranija pravila nastavljaju da budu u službi shvatanja koje je sada prošireno na novi simbolizam. Ali potrebna su nam dodatna pravila za rukovanje kvantifikatorima u argumentu: zapravo, samo četiri - pravilo uvođenja i eliminacije za univerzalni i za egzistencijalni kvantifikator. Ustanovićemo prvo univerzalni kvantifikator.

Pravilo eliminacije za univerzalni kvantifikator tiče se upotrebe univerzalnog iskaza kao *premise* koja utvrđuje neku konkluziju, dok se pravilo uvođenja tiče onoga što je potrebno za univerzalni iskaz kao *konkluziju* iz premise. Od pomoći je imati na umu odgovarajuća pravila za ´&´, jer postoji velika sličnost između ´&´ i univerzalnog kvantifikatora, o čemu govore sledeće ocene.

O pojedinačnim argumentima pomoću kvantifikatora imamo u vidu pojedinačnu grupu objekata koju zovemo *univerzum govora* (universe of discourse). Na primer, smatra se da u algebri varijable ´*x*´,´*y*´,´*z*´,... obuhvataju brojeve, tako da je ovde naš univerzum govora skup svih brojeva; dok smo u razmatranju (28)-(33) iz poslednjeg odeljka naš univerzum govora eksplicitno sveli na skup svih ljudi. U stvari, naš univerzum govora jeste ono što shvatamo pod *opsegom* naših varijabli ´*x*´, ´*y*´,´*z*´,...

Radi slikovitosti, pretpostavimo da naš univerzum govora sadrži tačno 3 objekta (nije važno koja) čija su vlastita imena ´*m*´, ´*n*´,´*o*´. Odatle, tvrditi da sve ima svojstvo F biće, za ovaj univerzum, isto što i tvrditi da *m* ima F i *n* ima F i *o* ima F. Tako je onda

(1) $(x)Fx$

intuitivno ekvivalentno, u ovom univerzumu, složenoj konjunkciji sa 3 konjunkta

(2) $Fm \,\&\, Fn \,\&\, Fo$.

Pomoću očiglednog proširenja &E sada bismo mogli prirodno derivirati kao konkluziju iz (2) bilo koji od konjunkata, F*m*, F*n*, F*o*, posebno. Analogno tome, naše pravilo *eliminacije univerzalnog kvantifikatora* (UE) omogućiće nam da, na osnovu premise da *sve* stvari imaju F, zaključimo da *bilo koji pojedinačni objekat* ima F. Ovo pravilo može se smatrati kao prirodno proširenje &E onda kada shvatimo da tvrđenje takvog iskaza kao što je $(x)Fx$ jeste opšte ustanovljeni način tvrđenja složene konjunkcije.

Zapravo, ako su svi objekti u datom univerzumu imali imena koja su nam poznata, a kojih je bilo konačno mnogo, tada uvek možemo zameniti univerzalni iskaz o tom univerzumu ovakvom složenom konjunkcijom. To je zbog toga što, kada nam je potreban univerzalni kvantifikator, ova dva zahteva nisu uvek ispunjena. Na primer, u slučaju kada hoćemo da kažemo da svi prirodni brojevi[12] imaju izvesno svojstvo F; to znači isto što i reći da 0 ima F, i 1 ima F, i 2 ima F, i tako dalje; ali pošto ima beskonačno mnogo brojeva mi smo onemogućeni da zaista upotpunimo željenu konjunkciju pa ostavljamo da kvantifikator dovede ovaj posao do kraja. Zbog toga što naš univerzum govora može biti po veličini beskonačan ne možemo reći da je univerzalan iskaz *ekvivalentan* sa složenom konjunkcijom, mada je istina da je analogija sa '&' intuitivno od velike pomoći.

Prema tome opravdanje za UE sastoji se u tome što ako sve ima izvesno svojstvo onda ga mora imati bilo koja pojedinačna stvar. UE će nam omogućiti da sa $(x)Fx$ pređemo na konkluzije kao što su Fm i Fn, i sa $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ na $Fm \rightarrow Gm$ i $Fn \rightarrow Gn$ (ako je sve takvo da ima G ako ima F, onda pojedinačno *m* ima G ako *m* ima F, *n* ima G ako *n* ima F). U dokazu sledećeg elementarnog sekventa ovo je pravilo objašnjeno primerom:

100 $Fm, (x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash Gm$

1	(1)	Fm	A
2	(2)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3)	$Fm \rightarrow Gm$	2 UE
1,2	(4)	Gm	1,3 MPP

100 prikazuje oblik tako očigledno zasnovanog argumenta kao što je oblik u logici čuvenog

(3) Sokrat je čovek; svi ljudi su smrtni; prema tome Sokrat je smrtan.

(pri čemu neka '*m*' bude Sokrat, F neka bude čovek, a G neka bude smrtan). Sada smo u stanju da vrednujemo argumente sa Cvrčkom i kiseonikom (primeri (4) i (5) iz poslednjeg odeljka). Njihov zajednički oblik (uporedi (7) iz poslednjeg odeljka) je

12 Pod *prirodnim brojevima* shvataju se takvi brojevi kao što su 0, 1, 2, 3, itd. Oni se ponekad zovu i *ne-negativni celi brojevi*, ili *pozitivni celi brojevi* koji obuhvataju brojeve 1, 2, 3, itd.

dokazan kao sledeci sekvent:

101 Fm, (x)(Fx –> ¬Gx) ⊢ ¬Gm

1	(1)	Fm	A
2	(2)	(x)(Fx –> ¬Gx)	A
2	(3)	Fm –> ¬Gm	2 UE
1,2	(4)	¬Gm	1,3 MPP

Primena UE u redu (3) jeste sasvim nalik njegovoj primeni u istom redu u dokazu 100: ako svemu sa F nedostaju G, onda u pojedinačnom slučaju ako *m* ima F *m* nema G.

Pravilo *uvođenja univerzalnog kvantifikatora* (UI) (the rule of universal quantifier introduction) oblikovano je za zasnivanje univerzalnih iskaza kao konkluzija. Po analogiji sa ´&´, da bismo na primeru našeg predašnjeg univerzuma od 3 objekta utvrdili da svi imaju F, moramo prvo ustanoviti da *m* ima F, da *n* ima F i da *o* ima F. Zatim, prema očiglednom protezanju (pravila) &I, mi smo sigurni da sve ima F. Međutim, ova tehnika neće biti od pomoći ako je naš univerzum neograničeno velik, ili ako nemamo imena svih objekata univerzuma. Evidentno je da nam tada treba drugačije sredstvo.

Razmislimo šta čini Euklid kada želi da dokaže da svi trouglovi imaju izvesno svojstvo; on počinje tako što kaže ´neka ABC bude trougao´ kao i da ABC ima svojstvo o kojem je reč; tada on zaključuje da *svi* trouglovi imaju to svojstvo[13]. Šta je ovde ´ABC´? Svakako ne *vlastito ime* nekog trougla, jer u tom slučaju konkluzija ne bi sledila. Na primer, kada je dato da je Hruščov ćelav, ne sledi da je svako ćelav. Prirodno je sagledati ´ABC´ kao ime *proizvoljno izabranog trougla* (arbitrary selected triangle), u svakom slučaju pojedinačnog trougla, ali bilo kojeg koji nam prvi dođe do ruke. Zbog toga što ako možemo pokazati da proizvoljno izabrani trougao ima F, onda možemo opravdano izvesti konkluziju da svi trouglovi imaju F.

Zbog toga uvodimo slova ´*a*´,´*b*´,´*c*´,... kao imena (ne vlastita imena) proizvoljno izabranih objekata u univerzumu govora i zovemo ih kraće *proizvoljna imena* (arbitrary names). Tada, sa značajnim rezervama koje će biti date kasnije, ako možemo pokazati da F*a* (proizvoljno izabrani objekat ima F), tada možemo zaključiti da (x)Fx.

Zaista, dokaz F*a* je uporediv sa dokazom svih potrebnih

[13] Pogledaj, na primer, Euklid, *Elementi*, I, Propozicije 16-21.

konjunkata u željenoj 'konjunkciji' (*x*)F*x*. U univerzumu kao što je onaj od 3 objekta, dokazati F*a* znači dokazati F*m*, F*n* i F*o*. Tako možemo uzeti *m* kao proizvoljno izabrano *a*, i *n*, i *o*. U slučaju gde je univerzum neograničeno velik dokazivanje F*a* može se uporediti sa dokazivanjem neograničeno mnogo konjunkata, zato kao *a* možemo izabrati bilo koji objekat u univerzumu.

Prema tome, opravdanje za UI bilo bi sledeće, sa izvesnim ogradama, da ako se za proizvoljno izabrani objekat može pokazati da ima svojstvo, onda ga sve mora imati, a UI će nam omogućiti da pređemo sa takvih premisa kao što su F*a* ili F*b* na konkluziju (*x*)F*x* i sa F*a* –> G*a*, ili F*b* –> G*b* na (*x*)(F*x* –> G*x*) (ako proizvoljno izabrani objekat ima G kada ima F, onda sve sa F ima G). Usvajanjem novih slova '*a*', '*b*' i '*c*' dobija se prirodno proširenje za UE: iz (*x*)(F*x* –> G*x*) na primer možemo zaključiti ne samo da F*m* –> G*m* već takođe i da F*a* –> G*a*, F*b* –> G*b*, i tako dalje (proizvoljno izabrani objekti iz univerzuma su na kraju krajeva svi pojedinačni objekti u univerzumu, tako da ono što važi za sve takođe važi i za njih). I pravilo UI i ovo proširenje UE je ilustrovano u sledećim dokazima:

102 (*x*)(F*x* –> G*x*),(*x*)(G*x* –> H*x*) |— (*x*)(F*x* –> H*x*)

1	(1)	(*x*)(F*x* –> G*x*)	A
2	(2)	(*x*)(G*x* –> H*x*)	A
1	(3)	F*a* –> G*a*	1 UE
2	(4)	G*a* –> H*a*	2 UE
1,2	(5)	F*a* –> H*a*	3,4 SI(S) 1.2.1(i)
1,2	(6)	(*x*)(F*x* –> H*x*)	5 UI

Da bismo dokazali (*x*)(F*x* –> H*x*), pokušavamo da dokažemo F*a* –> H*a* (da bismo dokazali da sve sa F ima H pokušavamo da dokažemo da neki proizvoljno izabrani objekat sa F ima H). Iz asumpcija (1) i (2) pomoću UE u njegovom maločas proširenom obliku imamo (3) F*a* –> G*a* i (4) G*a* –> H*a*; željeno F*a* –> H*a* sada sledi zaključivanje iskaznim računom, zapravo, koracima ugrađenim u sekvent iz Poglavlja 1, koje skraćujemo pomoću SI. (Dosledno govoreći, nismo dokazali da se SI može dobiti kao derivirano pravilo za predikatski račun, ali proširenje našeg prikaza u Poglavlju 2, Odeljak 2, na novi formalni jezik jeste zapravo neposredno). Ovaj je dokaz tipičan za rad predikatskim računom tamo gde su i asumpcije i konkluzije kvantifikovani

univerzalno: izdvajamo iz asumpcija univerzalne kvantifikatore, menjajući varijable u proizvoljna imena, primenjujemo korake *iskaznog računa* i konačno ponovo uvodimo univerzalni kvantifikator pomoću UI. Pogledajmo sledeći primer.

103 $(x)(Fx \rightarrow Gx), (x)Fx \vdash (x)Gx$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(x)Fx$	A
1	(3)	Fa –> Ga	1 UE
2	(4)	Fa	2 UE
1,2	(5)	Ga	3,4 MPP
1,2	(6)	$(x)Gx$	5 UI

Da bismo dokazali $(x)Gx$ pomoću UI tragamo za G*a*, koje sledi po MPP iz F*a* –> G*a* i F*a* i može se dobiti iz asumpcija pomoću UE.

Kao što je već ukazano, za slobodnu upotrebu UI treba utvrditi izvesno *ograničenje* (restrikciju), kako bismo uspeli da izbegnemo greške. Sledeća ilustracija pomoći će nam da pokažemo zašto. Pretpostavimo da smo, u geometrijskom kontekstu, proizvoljno izabrali površinu *a* i pretpostavili (i) da je ona oštrougla (to jest, da nijedan od njenih uglova nije veći od pravog ugla), i (ii) da je pravolinijska (to jest, da je obrazovana pomoću pravih linija); odatle na osnovu elementarnog geometrijskog rasudivanja možemo zaključiti da je *a* trougao. Izražavajući (i) pomoću 'O*a*', (ii) pomoću 'P*a*', a konkluziju pomoću 'T*a*', imamo da T*a* sledi iz O*a* i P*a*. Odavde, pomoću koraka CP, pošto je dato O*a*, P*a* –> T*a*. Ako sada primenimo UI dosledno, iz O*a* možemo zaključiti da $(x)(Px \rightarrow Tx)$ kada je data proizvoljno izabrana oštrougla površ tada su sve pravolinijske površi trouglovi. Konkluzija je evidentno pogrešna, osim što možemo učiniti asumpciju istinitom u slučaju da naprosto izaberemo neku oštrouglu površ.

Greška koja se ovde pojavila može biti opisana tako što će se reći da mi nemamo prava da iz konkluzije P*a* –> T*a* pređemo na $(x)(Px \rightarrow Tx)$, samo zato što konkluzija počiva na *posebnoj asumpciji* koja sadrži *a* takvo da O*a*. Dokazali smo zapravo da ako je naša proizvoljno izabrana površ *a* pravolinijska onda je ona trouglasta, ali samo na asumpciji da je ona takođe oštrougla. Ovu grešku možemo izbeći ako, pre nego što primenimo UI u prelaženju sa iskaza o *a* na univerzalnu konkluziju, osiguramo da

asumpcija na kojoj iskaz o *a* počiva ne uključuje posebnu asumpciju koja sadrži *a* samo; drugim rečima da, pre nego što primenimo UI, moramo biti sigurni da se '*a*' ne pojavljuje u bilo kojoj od asumpcija na kojoj konkluzija počiva. Ovo uspešno obustavlja pogrešan potez na koji je gore ukazano. Zato što zakjlučak P*a* –> T*a* počiva na asumpciji O*a*, u kojoj je *a* pomenuto, UI ne može biti primenjena.

Primena UI koja je data ranije prati ovo ograničenje, kao što to čitalac može sam proveriti. Na primer, u dokazu 103 primenili smo UI na konkluziju G*a* da bismo dobili (*x*)G*x*; ali asumpcije na kojima G*a* počiva bile su (*x*)(F*x* –> G*x*) i (*x*)F*x* i ni u jednoj od njih '*a*' se nije pojavilo. Ovo ograničenje je u praksi lako sagledati: pre primene UI na '...*a*...', u svrhu dobijanja '(*x*)(...*x*...)', prelazimo preko asumpcija na kojima '...*a*...' počiva da bismo obezbedili da se '*a*' u njima nigde ne pojavljuje.

Najdirektniji oblik greške viden je u sledećem 'dokazu':

1	(1)	F*a*	A
1	(2)	(*x*)F*x*	1 UI

Na primer, ako 'F' uzmemo kao svojstvo biti neparan, možemo proizvoljno izabrati, u univerzumu brojeva, neki neparan broj, recimo 3, tako da Fa postaje istinito; ali evidentno je da odatle ne sledi da su *svi* brojevi neparni, što bi bilo lažno. Prelaz sa (1) na (2) je izbegnut ovim ograničenjem zato što (1) počiva na sebi samoj, u kojoj se pojavljuje '*a*'.

Zapravo, u ovome odeljku nemamo preciznu formulaciju pravila UE i UI: ona je odložena do Poglavlja 4, Odeljak 1, gde ćemo detaljnije predstaviti pravila formiranja za predikatski račun analogna onima iz Poglavlja 2, Odeljak 1, datim za iskazni račun. Ali trenutno intuitivno shvatanje omogućiće studentu da razume elementarne dokaze koji su dati u tekstu kao i da izradi vežbe koje slede. Samo u tananijoj izradi će nam biti potrebno sasvim dosledno zasnivanje pravila kvantifikacije.

V e ž b e:

1 Prevedi sledeće argumente u simbolizam predikatskog računa, a onda pokaži njihovu validnost uz pomoć UE i pravila iskaznog računa:

(a) Brljavko je dalmatinac; svi dalmatinci su divni; prema tome, Brljavko je divan. ('*m*', 'D', 'B')
(b) Brljavko je divan; nijedan dalmatinac nije divan; prema tome, Brljavko nije dalmatinac. ('*m*', 'B', 'D')
(c) Brljavko nije dalmatinac; samo dalmatinci su nervozni; prema tome, Brljavko nije nervozan. ('*m*', 'D', 'N')
(d) Svi muški bolničari su simpatični; William nije simpatičan; William je muško; prema tome William nije bolničar. ('M', 'B', 'S' i '*n*')
(e) Svi Francuzi izuzev Parižana su ljubazni; Jacques je Francuz; Jacques nije ljubazan; prema tome Jacques je Parižanin. ('F', 'P', 'Lj' i '*m*')

2 (i) Koristeći UE i UI zajedno sa pravilima iskaznog računa pokaži validnost sledećih sekvenata:

(a) $(x)(Fx \rightarrow Gx), (x)(Gx \rightarrow \neg Hx) \vdash (x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$
(b) $(x)(Fx \rightarrow \neg Gx), (x)(Hx \rightarrow Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$
(c) $(x)(Fx \rightarrow Gx), (x)(Hx \rightarrow \neg Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$
(d) $(x)(Gx \rightarrow \neg Fx), (x)(Hx \rightarrow Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow \neg Hx)$
(e) $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)Fx \rightarrow (x)Gx$
(f) $(x)(Fx \vee Gx \rightarrow Hx), (x)\neg Hx \vdash (x)\neg Fx$

(ii) Za svaki od sledećih argumenata ukaži koji od sekvenata (a)-(d) koji su gore izloženi prikazuje njihovu logičku formu (utvrđujući na taj način validnost sledećih argumenata):

(a) Nijedan Nemac nije Francuz; svi Bavarci su Nemci; prema tome, nijedan Francuz nije Bavarac.
(b) Nijedan Francuz nije pivopija; svi Bavarci su pivopije; prema tome, nijedan Francuz nije Bavarac.
(c) Svi Bavarci su pivopije; nijedan Francuz nije pivopija; prema tome, nijedan Bavarac nije Francuz.
(d) Svi Nemci su patriote; nijedan patriota nije pretvoran; prema tome nijedan Nemac nije pretvoran.

3 Egzistencijalni kvantifikator

Kao što je univerzalni kvantifikator povezan sa '&', tako je egzistencijalni kvantifikator povezan sa 'v'. U univerzumu od 3 objekta koje smo razmotrili u zadnjem odeljku '$(x)Fx$' znači isto što i

F*m* & F*n* & F*o*´. Reći da *postoji bar jedno x* sa F u onom univerzumu znači isto što i reći da *ili m* ima F *ili n* ima F, *ili o* ima F. Prema tome ovde ´(∃*x*)F*x*´ znači isto što i ´F*m* v F*n* v F*o*´. U slučaju infinitno velikog univerzuma, na primer prirodnih brojeva, reći da postoji broj sa F ili da neki broj ima F, znači isto što i reći da ili 0 ima F, ili 1 ima F, ili 2 ima F, ili ... Kao što nam je neophodan univerzalni kvantifikator zato što ne možemo napisati ´infinitnu konjunkciju´, tako nam je neophodan egzistencijalni kvantifikator zato što ne možemo napisati ´infinitnu disjunkciju´.

U skladu s tim, dva pravila za egzistencijalni kvantifikator biće sagledana kao proširenja pravila vI i vE. Uzmimo prvo pravilo *uvođenja egzistencijalnog kvantifikatora* (EI). Da bismo utvrdili takvu konkluziju kao što je (∃*x*)F*x*, odgovarajuća premisa je *nešto* nalik na F*m*: kada je dat pojedinačan objekat sa F, tada možemo zaključiti da nešto ima F. Prema tome, u našem univerzumu od 3 objekta, kada je dato bilo koje od F*m*, F*n*, F*o*, tada možemo zaključiti (∃*x*)F*x*; ili, u neograničenom slučaju, kada je dat bilo koji pojedinačan prirodan broj sa F, tada možemo zaključiti da neki broj ima F. Ako imamo na umu disjunktivni status egzistencijalnog kvantifikatora, tada bi analogija sa vI trebalo da je očita.

Odatle sledi da bi opravdanje za EI bilo u tome što ako pojedinačna stvar ima izvesno svojstvo onda ga nešto mora posedovati, a EI će nam omogućiti prelaz sa premisa kao što su F*m* ili F*n* na konkluziju (∃*x*)F*x*, kao i sa F*m* & G*m* i F*n* & G*n* na konkluziju (∃*x*)(F*x* & G*x*) (ako *m* ima i F i G, ili ako *n* ima i F i G, tada nešto ima i F i G). Dalje, proširujemo pravilo da bismo ga primenili takođe i na premise koje sadrže proizvoljno izabrane objekte *a*, *b*, *c*: zato, ako neka proizvoljno izabrana stvar ima F, onda opet nešto ima F. Tako će nam, na primer, EI omogućiti prelaz od premise Fa v Ga na konkluziju (∃*x*)(F*x* v G*x*) (ako neki proizvoljno izabrani objekat ima ili F ili G, onda nešto ima ili F ili G).

Vrlo jednostavna primena ovog pravila zbiva se u dokazu sledećeg (evidentno validnog) sekventa:

104 (*x*)F*x* ⊢ (∃*x*)F*x*

1	(1)	(*x*)F*x*	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	(∃*x*)F*x*	2 EI

Ako sve ima F, onda posebno neki proizvoljno izabrani objekat a ima F, odakle pomoću EI sledi da nešto ima F.

Pravilo *eliminacije egzistencijalnog kvantifikatora* (EE) najlakše može biti shvaćeno u svetlu vE. Kada je data disjunkcija A v B, sa svrhom da se ustanovi konkluzija C, deriviramo prvo C iz A kao asumpcije, a potom iz B kao asumpcije, znajući pri tome da, ako C sledi *i* iz A *i* iz B tada, zato što važi jedno ili drugo, tada mora važiti i C. Slično, ako znamo da u našem univerzumu od tri objekta nešto ima F, odatle znamo i

(1) F*m* v F*n* v F*o*.

U nameri da utvrdimo C, možemo unapred pretpostaviti svaki disjunkt složene disjunkcije znajući da ako C sledi iz *svih* tih disjunkata tada, zato što važi neki od njih, mora važiti i C. Međutim, tamo gde se radi o neograničenom univerzumu, $(\exists x)Fx$ je vrsta 'infinitne disjunkcije', pa zato tu ne može biti reči o derivaciji C iz nekog od infinitno mnogo disjunkata. U slučaju UI prihvatili smo posredništvo proizvoljnih imena '*a*', '*b*', '*c*', samo zato što ne bismo bili u stanju da zasebno utvrdimo infinitno mnogo konjunkata koji mogu obrazovati 'infinitnu konjunkciju' $(x)Fx$. Za EE možemo upotrebiti isto sredstvo. Umesto toga da pokažemo da C sledi iz zasebnih asumpcija F*m*, F*n*, F*o*, možemo pokazati da C sledi iz proste asumpcije, F*a*, tako što proizvoljno izabrani objekat ima F. Obrazac dokaza tada će biti: ako je dato $(\exists x)Fx$, i C sledi iz asumpcije F*a*, onda svakako sledi C. Ovde dokaz za C iz Fa jezgrovito predstavlja infinitno mnogo mogućih derivacija C iz svih disjunkata u prikrivenoj disjunkciji $(\exists x)Fx$. F*a* možemo ovde nazvati, nadam se razložno, *tipični disjunkt* koji je odgovarajući za egzistencijalni iskaz $(\exists x)Fx$.

Zbog toga bi opravdanje za EE izgledalo ovako. Ako nešto ima izvesno svojstvo, i ako može biti pokazano da konkluzija C sledi iz asumpcije da proizvoljno izabrani objekat ima to svojstvo, onda znamo da C važi; zato što ako nešto ima to svojstvo, onda važi da ga ništa osim C nema, pa zbog toga svakako važi C. Konkluzija C će naravno počivati, kao u vE, na bilo kojoj od asumpcija na kojima počiva egzistencijalni iskaz, kao i na bilo kojoj asumpciji koja je upotrebljena da se derivira C iz odgovarajućeg tipičnog disjunkta koji je izdvojen iz samog disjunkta. Sa desne ćemo strane onda imati navedena tri reda: (i) red u kojem

se događa egzistencijalni iskaz; (ii) red u kojem je predstavljen tipični disjunkt; i (iii) red u kojem je C izvedeno kao konkluziju iz tipičnog disjunkta kao asumpcije.

Ova nova pravila su predstavljena u sledećim dokazima:

105 (*x*)(F*x*—> G*x*), (∃*x*)F*x* ⊢ (∃*x*)G*x*

1	(1)	(*x*)(F*x*—> G*x*)	A
2	(2)	(∃*x*)F*x*	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	Fa —> Ga	1 UE
1,3	(5)	Ga	3,4 MPP
1,3	(6)	(∃*x*)G*x*	5 EI
1,2	(7)	(∃*x*)G*x*	2,3,6 EE

Ako je dato da sve sa F ima G i da nešto ima F, pokazujemo da nešto ima G. Pretpostavljamo, u redu (3), pripremajući se za EE, da proizvoljno izabrani objekat *a* ima F, te tada zaključujemo (red (6)) da nešto ima G. Sada smo spremni za korak EE; pošto je u redu (2) dat egzistencijalni iskaz da nešto ima F i dato je derivacija željene konkluzije u redu (6), dobijamo ponovo konkluziju u redu (7). Sa druge strane, navodimo red (2), egzistencijalni iskaz, red (3), tipični disjunkt, i red (6), konkluziju iz asumpcije. Konkluzija sada počiva na bilo kojoj od asumpcija na kojoj počiva i egzistencijalni iskaz - ovde jedino na sebi samom - kao i na bilo kojoj od asumpcija upotrebljenih da bi se dobila konkluzija iz tipičnog disjunkta F*a*, nezavisno od F*a*, što pružaju jedino (1) i (2).

Analogija sa vE može se izvesti uz pomoć pretpostavke, kao u posebnom slučaju, da se bavimo univerzumom od dva objekta koji sadrži samo *m* i *n*. Odatle, za ovaj univerzum, (∃*x*)F*x* obuhvata F*m* v F*n*, a (∃*x*)G*x* obuhvata G*m* v G*n*. Odgovarajući dokaz sa vE umesto EE bio bi sledeći:

1	(1)	(*x*)(F*x*—> G*x*)	A
2	(2)	F*m* v F*n*	A

3	(3)	F*m*	A	3′	(3′)	F*n*	A
1	(4)	F*m*—> G*m*	1 UE	1	(4′)	F*n*—> G*n*	1 UE
1,3	(5)	G*m*	3,4 MPP	1,3′	(5′)	G*n*	3′,4′ MPP
1,3	(6)	G*m* v G*n*	5 vI	1,3′	(6′)	G*m* v G*n*	5′ vI

1,2	(7)	Gm v Gn	2,3,6,3′,6′ vE

Ovde redovi (3′)-(5′) dosledno odslikavaju (3)-(5) sa ′*n*′ umesto ′*m*′. Redovi (3)-(6) našeg pravog dokaza u 105 obuhvataju ove argumente blizance u jednom argumentu, na osnovu upotrebe proizvoljnih imena umesto vlastitih imena ′*m*′ i ′*n*′, kao i pomoću upotrebe tipičnog disjunkta ′F*a*′ umesto odvojenih disjunkata ′F*m*′ i ′F*n*′.

106 $(x)(Gx \rightarrow Hx), (\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$

1	(1)	$(x)(Gx \rightarrow Hx)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	A
3	(3)	$Fa \,\&\, Ga$	A
1	(4)	$Ga \rightarrow Ha$	1 UI
3	(5)	Ga	3 &E
1,3	(6)	Ha	4,5 MPP
3	(7)	Fa	3 &E
1,3	(8)	$Fa \,\&\, Ha$	6,7 &I
1,3	(9)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$	8 EI
1,2	(10)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$	2,3,9 EE

Ovde će strategija biti jasna. Da bi se dokazalo $(\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$ iz $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$, tražimo istu konkluziju iz F*a* & G*a*, koja je odgovarajući tipični disjunkt. Otuda što sve sa G ima H, iz G*a* možemo izvesti H*a*, zato što *a* ima F i H, otuda nešto ima i F i H. Konkluzija u (10) počiva na (2), prvobitnom egzistencijalnom iskazu, kao i (1), koje je upotrebljeno da bi se dobila konkluzija iz (3), što smo videli u redu (9).

Ova dva dokaza slikovito prikazuju zajedničku nit za otkrivanje dokaza. Kada je dato $(\exists x)(...x...)$ a želi da se dokaže konkluzija C, treba da pretpostavite (...*a*...) kao tipični disjunkt i da pokušate da dobijete odatle C. Zbog toga, ukoliko vam to pođe za rukom, EE će biti ono što će vam pružiti upravo ta konkluzija. Kada je (...*a*...) jednom pretpostavljeno, tip rasudivanja pomoću iskaznog računa biće vam od opšte pomoći u derivaciji C.

Kao u slučaju UI, upotreba proizvoljnih imena sa EE primorava na izvesna *ograničenja* (restrikcije) kako bi se izbegle greške. U slučaju UI zahtevali smo da proizvoljna imena kojima se bavimo ne bi trebalo da se pojavljuju u asumpcijama na kojima počiva izvedena konkluzija. Za EE zahtevamo da se proizvoljna imena kojima se bavimo neće pojaviti ili u izvedenoj konkluziji C ili u asumpcijama koje su upotrebljene da se deri-

vira C iz tipičnog disjunkta, sem u samom tipičnom disjunktu (ili u egzistencijalnom iskazu, vidi str. 155).

Da bismo videli da se proizvoljna imena ne smeju pojaviti u konkluziji C, neophodno nam je da uvidimo da bismo bili u stanju da dokažemo i drugačije, tj. da kada je dato da nešto ima F, da sve ima F.

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
1	(3)	Fa	1,2,2 EE
1	(4)	$(x)Fx$	3 UI

Korak UI je ispravan, zato što 1 ne sadrži '*a*'. Ali, korak EE nije ispravan zbog toga što konkluzija o kojoj je reč, ovde je to F*a*, sadrži '*a*'. Iz toga što nešto ima F ne sledi da neki proizvoljno izabrani objekat ima F, mada F*a* svakako sledi iz samog sebe. Da bismo videli da se proizvoljno ime ne sme pojaviti u asumpcijama (za razliku od tipičnog disjunkta) koje su upotrebljene da se dobije C, razmotrimo sledeći 'dokaz':

1	(1)	Fa	A
2	(2)	$(\exists x)Gx$	A
3	(3)	Ga	A
1,3	(4)	$Fa \,\&\, Ga$	1,3 &I
1,3	(5)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	4 EI
1,2	(6)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	2,3,5 EE

Konkluzija da nešto ima i F i G ovde je postignut iz dve asumpcije, da neki proizvoljno izabrani objekat ima i F i da nešto ima G. Uzmimo sada da je F biti paran a G biti neparan, pa tada mogu izabrati broj *a* koji je paran, tako da F*a* postaje istinito, a pošto postoje i neparni brojevi tada je istinito i $(\exists x)Gx$. Ali je zato lažno da je bilo koji broj i paran i neparan. Korak EE je neosnovan, zato što konkluzija u redu (5) počiva na (1) koje sadrži '*a*'.

Novo ograničenje je takođe lako sagledati u praksi. Na primer, da bismo videli da je korak EE u redu (10) iz 106 ispravan, ispitajmo red (9); tamo konkluzija ne sadrži '*a*': od dve asumpcije na kojima počiva, (3), tipični disjunkt svakako da sadrži '*a*' ali ga zato (1) ne sadrži; pa je u tom slučaju ograničenje ispunjeno.

Zbog toga što proizvoljno izabrani objekti obuhvataju znatan

deo našeg posla, možda bi bilo dobro njihov položaj učiniti nešto jasnijim. Neka F bude neko svojstvo a *a* proizvoljno izabrani objekat iz nekog univerzuma tada, ako je dato da sve ima F, *a* ima F, ali ne i obratno. Kao validan prihvatamo sekvent $(x)Fx \vdash Fa$, ali ne i sekvent $Fa \vdash (x)Fx$; i ovaj potonji odbacujemo zato što *a*, mada proizvoljno izabran, ne može biti *tipičan*. S druge strane, pomoću UI, pod izvesnim uslovima polazimo od premise (...*a*...) do konkluzije $(x)(...x...)$; međutim, neophodni uslovi su takvi da obezbeđuju da *a* ovde jeste tipično, zato što smo se dogovorili da (...*a*...) neće počivati ni na kakvoj posebnoj asumpciji vezanoj za *a*. Tako smo se izjasnili da, uzimajući da a ima F, nešto ima F, ali ne i obratno. Kao validan prihvatamo sekvent $Fa \vdash (\exists x)Fx$ ali ne i sekvent $(\exists x)Fx \vdash Fa$, a odbacujemo ovaj potonji zato što *a*, budući da je proizvoljno izabrano, ne sme biti neki od datih objekata sa F. S druge strane, pomoću EE pod izvesnim uslovima možemo derivirati konkluzije dobijene na osnovu Fa neposredno iz $(\exists x)Fx$, kao ono što Fa implicira takođe implicira $(\exists x)Fx$; međutim, ovde obuhvaćeni uslovi su takvi da obezbeđuju da je bilo koja ovakva konkluzija iz *Fa* postignuta samo na osnovu shvatanja da je *a* tipično - nije načinjena nijedna posebna asumpcija osim *Fa*, a ni konkluzija ne sadrži *a* - pa na taj način ona može biti shvaćena kao jedan od datih objekata sa F. Zato se mora praviti razlika između tvrdnje o proizvoljno izabranom objektu koji ima F, kako od tvrdnje $(x)Fx$ tako i od tvrdnje $(\exists x)Fx$, mada je ona derivabilna iz prve, a drugu možemo derivirati iz nje.

V e ž b e:

1 Koristeći kvantifikator i pravila iskaznog računa, pokaži validnost sledećih sekvenata:

(a) $(x)(Fx \rightarrow Gx), (\exists x)\neg Gx \vdash (\exists x)\neg Fx$

(b) $(x)(Fx \rightarrow Gx \,\&\, Hx), (\exists x)Fx \vdash (\exists x)Hx$

(c) $(x)(Fx \vee Gx \rightarrow Hx), (\exists x)\neg Hx \vdash (\exists x)\neg Fx$

2 (i) Koristeći kvantifikator i pravila iskaznog računa, pokaži validnost sledećih sekvenata:

(a) $(x)(Gx \rightarrow \neg Hx), (\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Hx)$

(b) $(x)(Hx \rightarrow Gx), (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Hx)$

(c) $(x)(Hx \rightarrow \neg Gx), (\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Hx)$
(d) $(x)(Gx \rightarrow Hx), (\exists x)(Gx \,\&\, Fx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$
(e) $(\exists x)(Gx \,\&\, Hx), (x)(Gx \rightarrow Fx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, Hx)$
(f) $(x)(Gx \rightarrow \neg Hx), (\exists x)(Gx \,\&\, Fx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Hx)$
(g) $(\exists x)(Gx \,\&\, \neg Hx), (x)(Gx \rightarrow Fx) \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Hx)$

(ii) Za svaki od sledećih sekvenata, pokaži koji od sekvenata (a)-(g) datih gore pokazuju njihov logički oblik (pokazujući pri tome validnost tih argumenata):
(a) Ni na jednu planinu se ne može popeti; na neka brda se može popeti; prema tome, neka brda nisu planine.
(b) Na neke planine se može popeti; sve planine su brda; prema tome, na neka brda se može popeti.
(c) Na sva brda se može popeti; na neke planine se ne može popeti; prema tome, neke planine nisu brda.
(d) Na sva brda se može popeti; neka brda su planine; prema tome, na neke planine se može popeti.
(e) Ni na jednu planinu se ne može popeti; neka brda su planine; prema tome, na neka brda se ne može popeti.
(f) Na neke planine se ne može popeti; sve planine su brda; prema tome, na neke planine se ne može popeti.
(g) Ni na jednu planinu se ne može popeti; neke su planine brda; prema tome, na neka brda se ne može popeti.

4 Osnovni validni sekventi sa kvantifikatorima

U sekventima 100-106 sagledali smo neke od temeljnih rezultata koji se odnose na kvantifikatore a koje smo sada u stanju da utvrdimo. Ovaj odeljak je posvećen dokazivanju daljih takvih rezultata; oni su značajni sami po sebi i njihovi dokazi će uzgred pružiti dublji uvid u upotrebu pravila kvantifikatora.

107 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)Fx \rightarrow (x)Gx$
108 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$

Ako je dato da sve sa F ima G, sledi da ako sve ima F onda sve ima G (107) i sledi da ako nešto ima F onda nešto ima G (108). Dokazi neposredno slede iz dokaza 103 odnosno 105, pomoću dodatnog koraka CP u svakom od slučajeva.

109 $(x)(Fx \,\&\, Gx) \dashv\vdash (x)Fx \,\&\, (x)Gx$

(a) $(x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (x)Fx \,\&\, (x)Gx$

1	(1)	$(x)(Fx \,\&\, Gx)$	Λ
1	(2)	$Fa \,\&\, Ga$	1 UE
1	(3)	Fa	2 &E
1	(4)	$(x)Fx$	3 UI
1	(5)	Ga	2 &E
1	(6)	$(x)Gx$	5 UI
1	(7)	$(x)Fx \,\&\, (x)Gx$	4,6 &I

(b) $(x)Fx \,\&\, (x)Gx \vdash (x)(Fx \,\&\, Gx)$

1	(1)	$(x)Fx \,\&\, (x)Gx$	Λ
1	(2)	$(x)Fx$	1 &E
1	(3)	Fa	2 UE
1	(4)	$(x)Gx$	1 &E
1	(5)	Ga	4 UE
1	(6)	$Fa \,\&\, Ga$	3,5 &I
1	(7)	$(x)(Fx \,\&\, Gx)$	6 UI

Iskaz da sve ima i F i G je meduizvodiv sa iskazom da i sve ima F i sve ima G. Dokazima nije potreban veći komentar sem zapažanja da je u redu (4) i (6) iz (a), kao i u redu (7) iz (b), ispunjeno ograničenje vezano za UI, zato što se '*a*' ne pojavljuje u asumpciji (1) ni u jednom od dokaza.

110 $(\exists x)(Fx \vee Gx) \dashv\vdash (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

(a) $(\exists x)(Fx \vee Gx) \vdash (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	Λ
2	(2)	$Fa \vee Ga$	Λ
3	(3)	Fa	Λ
3	(4)	$(\exists x)Fx$	3 EI
3	(5)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	4 vI
6	(6)	Ga	Λ
6	(7)	$(\exists x)Gx$	6 EI
6	(8)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	7 vI
2	(9)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	2,3,5,6,8 vE
1	(10)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	1,2,9 EE

(b) $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	A
2	(2)	$(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$Fa \vee Ga$	3 vI
3	(5)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	4 EI
2	(6)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	2,3,5 EE
7	(7)	$(\exists x)Gx$	A
8	(8)	Ga	A
8	(9)	$Fa \vee Ga$	8 vI
8	(10)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	9 EI
7	(11)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	7,8,10 EE
1	(12)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	1,2,6,7,11 vE

Iskaz da nešto ima ili F ili G je međuizvodiv sa iskazom da ili nešto ima F ili nešto ima G. U dokazu (a), opšta je strategija, kada je dat egzistencijalni iskaz kao asumpcija u redu (1), da se pretpostavi njemu ogovarajući tipični disjunkt (red (2)) i da se odatle dobije željena konkluzija. To je postignuto u redu (9) pomoću vE; vE je uvedeno zato što je tipični disjunkt sam po sebi disjunkcija, tako da konkluziju dobijamo iz svakog koraka naizmenice (redovi (5) i (8)). U konačnom koraku EE, zapažamo da konkluzija ne sadrži '*a*' i da red (9) počiva jedino na (2), tipičan disjunkt sam po sebi; dok (10) počiva jedino na (1), kao i da je ispunjeno ograničenje za EE. U dokazu (b), naša opšta strategija jeste napredovanje pomoću vE, pošto je data disjunkcija kao asumpcija u redu (1). Budući da je svaki disjunkt egzistencijalni iskaz, nakon njihovog pretpostavljanja (redovi (2) i (7)) pretpostavljamo njima odgovarajuće tipične disjunkte (redovi (3) i (8)) i iz njih dobijamo konkluziju (redovi (5) i (10)). Kod provere dva EE koraka (redovi (6) i (11)), zapažamo da konkluzija gubi '*a*' i da redovi (5) i (10) počivaju samo na tipičnim disjunktima (3) i (8).

Međuizvodivost rezultata 109 i 110 sasvim je očekivana kada imamo na umu konjunktivan status univerzalnog kvantifikatora i disjunktivan status egzistencijalnog kvantifikatora, kao što je razmotreno u prethodna dva odeljka. Slobodnije rečeno, ovo znači da univerzalni kvantifikator može biti distribuiran kroz konjunkciju a egzistencijalni kvantifikator kroz disjunkciju.

111 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	A
2	(2)	$Fa \,\&\, Ga$	A
2	(3)	Fa	2 &E
2	(4)	$(\exists x)Fx$	3 EI
2	(5)	Ga	2 &E
2	(6)	$(\exists x)Gx$	5 EI
2	(7)	$(\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx$	4,6 &I
1	(8)	$(\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx$	1,2,7 EE

Uzimajući da nešto ima i F i G, odatle sledi da nešto ima F i nešto ima G. Nastavljamo pomoću EE i u redu (2) pretpostavljamo tipični disjunkt $Fa \,\&\, Ga$ koji odgovara (1)$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$. Kod EE u redu (8), zapažamo da konkluzija gubi '*a*' i da (7) počiva samo na (2).

Obrnuti sekvent, $(\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$, nije validan; uzmimo univerzum pozitivnih celih brojeva i neka F bude svojstvo biti paran, G svojstvo biti neparan; tada je istinito da postoje parni brojevi i da postoje neparni brojevi ($(\exists x)Fx) \,\&\, (\exists x)Gx$)), ali je lažno da postoje brojevi koji su i parni i neparni (($(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$)). Od pomoći je uvideti kako je prirodan pokušaj da se dokaže da je ovaj sekvent pogrešan, sa stanovišta ograničenja koje važi za EE. Možemo početi ovako:

1	(1)	$(\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx$	A
1	(2)	$(\exists x)Fx$	1 &E
1	(3)	$(\exists x)Gx$	1 &E
4	(4)	Fa	A
5	(5)	Ga	A
4,5	(6)	$Fa \,\&\, Ga$	4,5 &I
4,5	(7)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	6 EI

Za egzistencijalne iskaze (2) i (3) pretpostavili smo tipične disjunkte (4) i (5) i iz njih izveli konkluziju $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$. Ali bilo koji pokušaj da se primeni EE, upotrebljavajući ili (2) ili (3), ovde zapada u grešku, zato što konkluzija u redu (7) počiva na (4) i (5) gde se u oba ova slučaja pojavljuje '*a*'. Odatle ne možemo dobiti ni

1,5	(8)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	2,4,7 EE

(zato što se *'a'* pojavljuje u (5)), niti

1,4	(8)	$(\exists x)(Fx \& Gx)$	3,5,7 EE

(zato što se *'a'* pojavljuje u (4)). Kada bismo mogli postići bilo koji od ovih redova, konkluzija

1	(9)	$(\exists x)(Fx \& Gx)$	

bi naravno sledila na osnovu dodatnog (osnovanog) koraka EE.

112 $(x)Fx \vee (x)Gx \vdash (x)(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$(x)Fx \vee (x)Gx$	A
2	(2)	$(x)Fx$	A
2	(3)	Fa	2 UE
2	(4)	$Fa \vee Ga$	3 vI
2	(5)	$(x)(Fx \vee Gx)$	4 UI
6	(6)	$(x)Gx$	A
6	(7)	Ga	6 UE
6	(8)	$Fa \vee Ga$	7 vI
6	(9)	$(x)(Fx \vee Gx)$	8 UI
1	(10)	$(x)(Fx \vee Gx)$	1,2,5,6,9 vE

Kada je dato ili da sve ima F ili da sve ima G, tada sve ima ili F ili G. Dokaz je pomoću vE; u korišćenju UI u redovima (5) i (9) zapažamo da nijedan korak pretpostavljene disjunkcije (1) ne sadrži *'a'*, tako da je ograničenje ispunjeno.

Obrnuti sekvent, $(x)(Fx \vee Gx) \vdash (x)Fx \vee (x)Gx$, *nije* validan o čemu svedoči upravo dato tumačenje; zato što su svi pozitivni celi brojevi ili parni ili neparni, ali nije slučaj da su svi parni, niti je slučaj da su svi neparni. U ovom slučaju, upravo ograničenje nad UI sprečava prirodne pokušaje da se dokaže ovaj sekvent. Prema tome:

1	(1)	$(x)(Fx \vee Gx)$	A
1	(2)	$Fa \vee Ga$	1 UE
3	(3)	Fa	A

Zaključujući $Fa \vee Ga$ iz (1), pretpostavili smo u redu (3) prvi disjunkt Fa; ali sada smo sprečeni da zaključimo $(x)Fx$ zato što (3) sadrži *'a'*. Kada bi ovaj korak bio dovoljan mogli bismo zaključiti $(x)Fx \vee (x)Gx$ pomoću vI, a tada istu konkluziju dobiti iz Ga, a vE bi vodilo invalidnom sekventu.

113 $(\exists x)Fx \dashv\vdash \neg(x)\neg Fx$

(a) $(\exists x)Fx \vdash \neg(x)\neg Fx$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
3	(3)	$(x)\neg Fx$	A
3	(4)	$\neg Fa$	3 UE
2,3	(5)	$Fa \,\&\, \neg Fa$	2,4 &I
2	(6)	$\neg(x)\neg Fx$	3,5 RAA
1	(7)	$\neg(x)\neg Fx$	1,2,6 EE

(b) $\neg(x)\neg Fx \vdash (\exists x)Fx$

1	(1)	$\neg(x)\neg Fx$	A
2	(2)	$\neg(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$(\exists x)Fx$	3 EI
2,3	(5)	$(\exists x)Fx \,\&\, \neg(\exists x)Fx$	2,4 &I
2	(6)	$\neg Fa$	3,5 RAA
2	(7)	$(x)\neg Fx$	6 UI
1,2	(8)	$(x)\neg Fx \,\&\, \neg(x)\neg Fx$	1,7 &I
1	(9)	$\neg\neg(\exists x)Fx$	2,8 RAA
1	(10)	$(\exists x)Fx$	9 DN

Iskaz da nešto ima F je meduizvodiv sa iskazom da nije slučaj da svemu nedostaje F. U dokazu (a), ako je dato $(\exists x)Fx$, pretpostavljamo tipičan disjunkt Fa (red (2)) i idemo odatle ka konkluziji $\neg(x)\neg Fx$. Ovo dobijamo pomoću RAA i saglasno tome u redu (3) pretpostavljamo $(x)\neg Fx$. Ograničenje nad EE u redu (7) je ispunjeno, zato što konkluzija gubi ´a´. U dokazu (b) pretpostavili smo u redu (2) $\neg(\exists x)Fx$ sa tom svrhom da se derivira $(x)\neg Fx$, koje je u kontradikciji sa (1). Da bismo dobili $(x)\neg Fx$, dovoljno je dobiti ¬Fa i upotrebiti UI, tako da pretpostavljamo Fa (red (3)) i tražimo kontradikciju (red (5)). Kod primene UI u redu (7) imaj u vidu da (6) počiva samo na (2), kome nedostaje ´a´.

S obzirom na odnos između kvantifikatora i ´&´ i ´v´, međuizvodivost rezultata 113 je srodna rezultatu 36 u Poglavlju 1, Odeljak 5. Zaista *mutatis mutandis*, rezultati su strukturalno isti, kao što čitalac može sam za sebe zapaziti proverom. Slobodnije rečeno, 113 nam govori da je bilo koji egzistencijalni iskaz isto što i negacija univerzalnog iskaza, na onaj način na koji nam 36 kazuje da je bilo koja disjunkcija isto što i negacija izvesne

konjunkcije. Obrnuto, naš sledeci rezultat kaže da je bilo koji univerzalni iskaz isto što i negacija egzistencijalnog iskaza i trebalo bi ga porediti sa sekventom 1.5.1(h).

114 $(x)Fx \dashv\vdash \neg(\exists x)\neg Fx$

(a) $(x)Fx \dashv\vdash \neg(\exists x)\neg Fx$

1	(1)	$(x)Fx$	A
2	(2)	$(\exists x)\neg Fx$	A
3	(3)	$\neg Fa$	A
1	(4)	Fa	1 UE
1,3	(5)	$Fa \,\&\, \neg Fa$	3,4 &I
3	(6)	$\neg(x)Fx$	1,5 RAA
2	(7)	$\neg(x)Fx$	2,3,6 EE
1,2	(8)	$(x)Fx \,\&\, \neg(x)Fx$	1,7 &I
1	(9)	$\neg(\exists x)\neg Fx$	2,8 RAA

(b) $\neg(\exists x)\neg Fx \vdash (x)Fx$

1	(1)	$\neg(\exists x)\neg Fx$	A
2	(2)	$\neg Fa$	A
2	(3)	$(\exists x)\neg Fx$	2 EI
1,2	(4)	$(\exists x)\neg Fx \,\&\, \neg(\exists x)\neg Fx$	1,3 &I
1	(5)	$\neg\neg Fa$	2,4 RAA
1	(6)	Fa	5 DN
1	(7)	$(x)Fx$	6 UI

Iskaz da sve ima F je meduizvodiv sa iskazom da nije slučaj da nečemu nedostaje F. U dokazu (a) pretpostavili smo $(\exists x)\neg Fx$ (red (2)) da bismo dobili $\neg(x)Fx$, u kontradikciji sa (1), te nastavili pomoću EE, pretpostavljajući tipični disjunkt u redu (3). U dokazu (b) dovoljno je dokazati F*a* iz (1), odatle pretpostavljamo $\neg Fa$ u redu (2) i tragamo za kontradikcijom. Citalac bi trebalo da se uveri da su ovde ispunjena ograničenja nad EE i UI.

115 $(x)Fx \dashv\vdash (y)Fy$

1	(1)	$(x)Fx$	A
1	(2)	Fa	UE
1	(3)	$(y)Fy$	2 UI

Konverzija derivabilna na sličan način. Zato što su varijable jedina sredstva za unakrsno pretraživanje (unakrsnu referenciju, cross-reference) trebalo bi očekivati ovu međuizvodivost. Ove

rečenice zapravo izražavaju isti iskaz - da sve ima F. Slično

116 $(\exists x)Fx \dashv\vdash (\exists y)Fy$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
1	(3)	$(\exists y)Fy$	2 EI
1	(4)	$(\exists y)Fy$	1,2,3 EE

Sledećem dokazu nisu potrebni komentari, ali čitalac bi trebalo da pazi na primedbe u vezi sa ograničenjima kod EE i UI.

117 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \dashv\vdash \neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$

(a) $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash \neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$	A
3	(3)	$Fa \,\&\, \neg Ga$	A
3	(4)	$\neg(Fa \rightarrow Ga)$	3SI(S) 2.2.5(g)
1	(5)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,3	(6)	$(Fa \rightarrow Ga) \,\&\, \neg(Fa \rightarrow Ga)$	4,5 &I
3	(7)	$\neg(x)(Fx \rightarrow Gx)$	1,6 RAA
2	(8)	$\neg(x)(Fx \rightarrow Gx)$	2,3,7 EE
1,2	(9)	$(x)(Fx \rightarrow Gx) \,\&\, \neg(x)(Fx \rightarrow Gx)$	1,8 &I
1	(10)	$\neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$	2,9 RAA

(b) $\neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$\neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$	A
2	(2)	$\neg(Fa \rightarrow Ga)$	A
2	(3)	$Fa \,\&\, \neg Ga$	2 SI(S) 2.2.5(g)
2	(4)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$	3 EI
1,2	(5)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx) \,\&\, \neg(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$	1,4 &I
1	(6)	$\neg\neg(Fa \rightarrow Ga)$	2,5 RAA
1	(7)	$Fa \rightarrow Ga$	6 DN
1	(8)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	7 UI

Iskaz da sve sa F ima G jeste meduizvodiv sa iskazom da nije slučaj da nešto ima F ali ne i G; slobodnije rečeno, tvrditi da sve sa F ima G jeste pobijati da nešto sa F nema G.

Poslednja dva meduizvodiva rezultata iz ovog odeljka pomalo su začudujuća.

118 $(x)(Fx \rightarrow P) \dashv\vdash (\exists x)Fx \rightarrow P$

(a) $(x)(Fx \rightarrow P) \vdash (\exists x)Fx \rightarrow P$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2)	$(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	$Fa \rightarrow P$	1 UE
1,3	(5)	P	3,4 MPP
1,2	(6)	P	2,3,5 EE
1	(7)	$(\exists x)Fx \rightarrow P$	2,6 CP

(b) $(\exists x)Fx \rightarrow P \vdash (x)(Fx \rightarrow P)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \rightarrow P$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$(\exists x)Fx$	2 EI
1,2	(4)	P	1,3 MPP
1	(5)	$Fa \rightarrow P$	2,4 CP
1	(6)	$(x)(Fx \rightarrow P)$	5 UI

Univerzalni iskaz da za svaki objekat ako on ima F onda sledi P, jeste međuizvodiv sa kondicionalom da ako nešto ima F onda P. (Ovde je važno imati u vidu da univerzalni kvantifikator u ´$(x)(Fx \rightarrow P)$´ određuje ceo izraz $(Fx \rightarrow P)$, dok egzistencijalni kvantifikator u ´$(\exists x)Fx \rightarrow P$´ određuje samo antecedent celog kondicionala; uporedi razliku između ´$\neg(P \rightarrow Q)$´ i ´$\neg P \rightarrow Q$´.) Odatle, ako kažemo da je F svojstvo biti čovek, a P iskaz da je Zemlja naseljena, reći da ako postoje ljudi tada je Zemlja naseljena jeste što i reći da, za bilo koji objekat, ako postoji (neki) čovek tada je Zemlja naseljena.

119 $(\exists x)(P \rightarrow Fx) \dashv\vdash P \rightarrow (\exists x)Fx$

(a) $(\exists x)(P \rightarrow Fx) \vdash P \rightarrow (\exists x)Fx$

1	(1)	$(\exists x)(P \rightarrow Fx)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$P \rightarrow Fa$	A
2,3	(4)	Fa	2,3 MPP
2,3	(5)	$(\exists x)Fx$	4 EI
1,2	(6)	$(\exists x)Fx$	1,3,5 EE
1	(7)	$P \rightarrow (\exists x)Fx$	2,6 CP

(b) $P \rightarrow (\exists x)Fx \vdash (\exists x)(P \rightarrow Fx)$

1	(1)	$P \rightarrow (\exists x)Fx$	A
	(2)	$P \vee \neg P$	TI 44
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$(\exists x)Fx$	1,3 MPP
5	(5)	Fa	A
5	(6)	$P \rightarrow Fa$	5 SI(S) 50
5	(7)	$(\exists x)(P \rightarrow Fx)$	6 EI
1,3	(8)	$(\exists x)(P \rightarrow Fx)$	4,5,7 EE
9	(9)	$\neg P$	A
9	(10)	$P \rightarrow Fa$	9 SI(S) 51
9	(11)	$(\exists x)(P \rightarrow Fx)$	10 EI
1	(12)	$(\exists x)(P \rightarrow Fx)$	2,3,8,9,11 vE

Egzistencijalni iskaz da postoji nešto takvo da ako P onda to ima F jeste meduizvodiv sa kondicionalom da ako P onda nešto ima F. Dokaz (a) sledi neposredno onda kada imamo u vidu da (3) jeste tipični disjunkt koji odgovara (1). Zato što P u redu (2) nema '*a*' korak EE se u redu (6) podvrgava ograničenju. Dokaz (b) je složeniji: on dokazuje pogodnost uvodenja zakona isključenja trećeg (red (2)) i nastavlja dalje pomoću vE (red (12)). Pretpostavili smo P u redu (3) i odatle dobili konkluziju u redu (8); na ovom stupnju koristimo EE, zato što tražimo konkluziju u redu (7) iz tipičnog disjunkta Fa (red (5)) koji je odgovarajući egzistencijalnom iskazu u redu (4). Na drugom stupnju (redovi (9)-(11)) koristimo, slično prvom stupnju u redu (6), sekvent iskaznog računa da bismo od $\neg P$ prešli na konkluziju $P \rightarrow Fa$ - jednostavan primer substitucije iz $\neg P \vdash P \rightarrow Q$. Nakon vE, konkluzija počiva samo na (1), koje je upotrebljeno da bi ga dobili iz disjunkta P u redu (8).

V e ž b e

1 Utvrdi sledeće rezultate:

(a) $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)\neg Gx \rightarrow (x)\neg Fx$

(b) $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (\exists x)\neg Gx \rightarrow (\exists x)\neg Fx$

(c) $(\exists x)\neg Fx \dashv\vdash \neg(x)Fx$

(d) $(x)\neg Fx \dashv\vdash \neg(\exists x)Fx$

(e) $(x)(Fx \rightarrow \neg Gx) \dashv\vdash (\exists x)(Fx \& Gx)$
(f) $(x)(Fx \leftrightarrow Gx) \dashv\vdash (x)(Fx \rightarrow Gx) \& (x)(Gx \rightarrow Fx)$
(g) $(x)(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash (x)Fx \leftrightarrow (x)Gx$
(h) $(x)(Fx \leftrightarrow Gx) \vdash (\exists x)Fx \leftrightarrow (\exists x)Gx$

2 (i) Koji od sekvenata dokazanih u tekstu pokazuje meduizvodivost iskaza da su sve žene smrtne sa iskazom da ne postoji žena koja nije smrtna?

(ii) Koji od sekvenata dokazanih u Vežbi 1 pokazuje meduizvodivost iskaza da nijedan čovek nije smrtan sa iskazom da nema čoveka koji je smrtan?

3 Utvrdi sledece međuizvodive rezultate:
(a) $(x)(P \rightarrow Fx) \dashv\vdash P \rightarrow (x)Fx$
(b) $(x)(P \& Fx) \dashv\vdash P \& (x)Fx$
(c) $(\exists x)(P \& Fx) \dashv\vdash P \& (\exists x)Fx$
(d) $(x)(P \vee Fx) \dashv\vdash P \vee (x)Fx$
(e) $(\exists x)(P \vee Fx) \dashv\vdash P \vee (\exists x)Fx$
(f) $(\exists x)(Fx \rightarrow P) \dashv\vdash (x)Fx \rightarrow P$

5 Opšti argumenti sa kvantifikatorom

Do sada naši derivirani sekventi češće su sadržavali svojstva nego relacije - predikatska slova pratila je tek jedna varijabla. Sada ispitujemo sekvente u kojima se događaju relacije, kao i opšti problem prikazivanja validnosti složenih argumenata kakvi se događaju u običnom jeziku.

Na samom početku bi bilo od pomoći zabeležiti dva međuizvodiva rezultata koji obuhvataju načela *obrtanja kvantifikatora* (odnosno, zamene mesta kvantifikatora, quantifier-shift principles).

120 $(x)(y)Fxy \dashv\vdash (y)(x)Fxy$

1	(1)	$(x)(y)Fxy$	A
1	(2)	$(y)Fay$	1 UE
1	(3)	Fab	2 UE
1	(4)	$(x)Fxb$	3 UI
1	(5)	$(y)(x)Fxy$	4 UI

U obratnom smeru se dokazuje na sličan način. U redu (2) ispustili smo kvantifikator '(x)' i pridruženu varijablu 'x' u korist proizvoljno izabranog objekta *a*. Prema tome (2) nam kaže da,

za svaki objekat, *a* preuzima relaciju F u njegovo ime. Potez od (2) do (3) je sličan i (3) tvrdi da neko proizvoljno izabrano *a* preuzima F prema nekom proizvoljno izabranom *b*. Treba zapaziti da nam UE dozvoljava da ispustimo samo jedan univerzalni kvantifikator istovremeno. Nakon toga vraćamo kvantifikatore obrnutim redom pomoću UI, imajući pri tome u vidu da se ni ´*a*´ ni ´*b*´ ne događa u (1). Iz (2) možemo osnovano zaključiti

1 (3´) F*aa*

(ako *a* preuzima F prema *svakoj* stvari, tada *a* preuzima F i prema samom sebi). A iz (3´) možemo osnovano zaključiti

1 (4´) (*x*)F*xx*

(ako proizvoljno a preuzima F prema samom sebi, tada pod uobičajenim ograničenjem svaka stvar preuzima F prema sebi samoj). Ali naravno naš pravi red (4) neće slediti iz (3´), niti će biti

(4´´) (*x*)F*xa*.

Ako je dato da *a* preuzima F prema sebi, odatle ne sledi i da svaka stvar preuzima F prema *a*. Neka proizvoljno izabrana osoba ima isto godina kao i ona sama, ali nema svako baš toliko godina, mada svako ima tačno toliko godina koliko zapravo ima. Ova bi razmatranja trebalo da su podsticaj za izbor različitog proizvoljnog imena ´*b*´ u redu (3), jer u suprotnom ne bismo bili u stanju da iznova uvedemo dva različita kvantifikatora.

121 (∃*x*)(∃*y*)F*xy* ⊣⊢ (∃*y*)(∃*x*)F*xy*

1	(1)	(∃*x*)(∃*y*)F*xy*	A
2	(2)	(∃*y*)F*ay*	A
3	(3)	F*ab*	A
3	(4)	(∃*x*)F*xb*	3 EI
3	(5)	(∃*y*)(∃*x*)F*xy*	4 EI
2	(6)	(∃*y*)(∃*x*)F*xy*	2,3,5 EE
1	(7)	(∃*y*)(∃*x*)F*xy*	1,2,6 EE

U obratnom smeru opet se dokazuje slično. (2) je tipični disjunkt koji odgovara redu (2). Različita proizvoljna imena ´*a*´ i ´*b*´ uzimamo iz dobrih razloga: korak EE u redu (6) bio bi neosnovan da je (3) bilo F*aa*. Iz F*aa*, da proizvoljno izabrano *a* preuzima F prema sebi samom, možemo izvesno zaključiti (red (5)) da nešto preuzima F

prema nečemu. Ali bismo iz F*aa* takođe mogli zaključiti

3 (4′) (∃*x*)F*xx*;

s tim što ova konkluzija ne bi sledila iz (2). Ako je dato da je neko niži od proizvoljno izabrane osobe *a*, odatle ne sledi da je neko niži od samog sebe. F*aa* u stvari nije pogodan tipični disjunkt koji je odgovarajući redu (2).

120 i 121 nam zaista pokazuju da je poredak univerzalnih kvantifikatora i poredak egzistencijalnih kvantifikatora po svom smislu nematerijalan. Međutim, ovo *nije* slučaj sa spojem dva kvantifikatora. Tako imamo:

122 (∃*x*)(*y*)F*xy* ⊢ (*y*)(∃*x*)F*xy*

1	(1)	(∃*x*)(*y*)F*xy*	A
2	(2)	(*y*)F*ay*	A
2	(3)	F*ab*	2 UE
2	(4)	(∃*x*)F*xb*	3 EI
2	(5)	(*y*)(∃*x*)F*xy*	4 UI
1	(6)	(*y*)(∃*x*)F*xy*	1,2,5 EE

Ovde je (2) tipični disjunkt koji je odgovarajući redu (1). Suštinsko je to da biramo različito proizvoljno ime ′*b*′ kod primene UE u redu (3). Faa bi bio osnovna konkluzija iz (2) i mogli bismo izvesti

2 (4′) (∃*x*)F*xa*

(ako *a* preuzima F prema sebi samom onda nešto preuzima F prema *a*). Ali korak UI u redu (5) bi sada bio neosnovan, zato što (2) sadrži ′*a*′.

Medutim, obrnut sekvent (*y*)(∃*x*)F*xy* ⊢ (∃*x*)(*y*)F*xy* nije derivabilan. Niti bi trebalo da želimo da bude: uzmimo univerzum ljudi i neka F bude relacija roditelja: tada svako ima nekog kao roditelja, ali nije istina da postoji neko ko je roditelj svakome. Od pomoći je uvideti kako su prirodni pokušaji da se ovo dokaže onemogućeni ograničenjima koja važe za naša pravila. Na primer:

1	(1)	(*y*)(∃*x*)F*xy*	A
1	(2)	(∃*x*)F*xa*	1 UE
3	(3)	F*ba*	A
3	(4)	(*y*)F*by*	3 UI ?
3	(5)	(∃*x*)(*y*)F*xy*	4 EI
1	(6)	(∃*x*)(*y*)F*xy*	2,3,5 EE

Jedini pogrešan korak jeste korak (4) - pogrešan je zato što (3) sadrži '*a*' tako da je narušeno ograničenje koje važi za UI. Ovaj 'blagi propust' trebalo bi da bude poučan s obzirom na praktičnu primenu ograničenja.

Postoji čuven i jednostavan argument koji je de Morgan naveo kao primer vrste zaključivanja kojim se, mada je očito osnovano, ne bi moglo rukovati unutar mreže tradicionalne logike. On ide ovako

(1) Svi konji su životinje; prema tome sve konjske glave su životinjske glave.

Da bi se pokazala validnost (1) pomoću naših pravila moramo ga prvo prevesti u simbolizam predikatskog računa. Neka F bude konj, G neka bude biti životinja, a H biti glava od. Tada je premisa argumenta evidentno $(x)(Fx \rightarrow Gx)$. Kao prvi korak prema razabiranju konkluzije možemo usvojiti

(2) Bilo šta što je glava konja jeste glava životinje.

Da bi nešto bilo glava konja mora postojati neki konj čija je to glava; simbolima, *a* je glava konja ako i samo ako $(\exists y)(Fy \,\&\, Hay)$. Slično, *a* je glava životinje ako i samo ako $(\exists y)(Gy \,\&\, Hay)$. Prema tome, sekvent koji nam je potrebno da dokažemo prikazujući validnost (1) jeste

123 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)((\exists y)(Fy \,\&\, Hxy) \rightarrow (\exists y)(Gy \,\&\, Hxy))$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(\exists y)(Fy \,\&\, Hay)$	A
3	(3)	$Fb \,\&\, Hab$	A
3	(4)	Fb	3 &E
3	(5)	Hab	3 &E
1	(6)	$Fb \rightarrow Gb$	1 UE
1,3	(7)	Gb	4,6 MPP
1,3	(8)	$Gb \,\&\, Hab$	5,7 &I
1,3	(9)	$(\exists y)(Gy \,\&\, Hay)$	8 EI
1,2	(10)	$(\exists y)(Gy \,\&\, Hay)$	2,3,9 EE
1	(11)	$(\exists y)(Fy \& Hay) \rightarrow (\exists y)(Gy \& Hay)$	2,10 CP
1	(12)	$(x)((\exists y)(Fy \& Hxy) \rightarrow (\exists y)(Gy \& Hxy))$	11 UI

Pošto je (1) dato kao asumpcija, da bismo dokazali univerzalan iskaz kao konkluziju tragamo za odgovarajućom tvrdnjom koja sadrži proizvoljno izabrani objekat *a*, kao što je to u redu (11).

Budući da je ovo kondicional, pretpostavili smo (red (2)) njegov antecedent i tragamo za njegovim konsekventom (red (10)). Pošto je asumpcija (2) egzistencijalni iskaz, pretpostavljamo njoj odgovarajući tipični disjunkt (red (3)) i odatle tragamo za odgovarajućom konkluzijom. Treba imati u vidu da smo u tipičnom disjunktu izabrali novo proizvoljno ime *'b'*. Preostala strategija ostaje na nivou iskaznog računa sve do reda (9), gde koristimo EI. Korak EE je osnovan (red (10)) zato što konkluzija gubi *'b'* (mada još sadrži *'a'*). Korak UI je osnovan (red (12)), zato što (1) gubi *'a'*.

Razmotrimo sada sledeći nešto složeniji argument:

(3) Neki dečaci vole sve igre; nijedan dečak ne voli dosadne stvari: prema tome nijedna igra nije dosadna stvar.

Prva premisa tvrdi da postoji nešto što je dečak i što voli sve igre, to jest ono voli bilo šta što je igra; da bismo to izrazili simbolima koristićemo 'F' za biti dečak, 'G' za biti igra, a 'H' za voleti:

(4) $(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow Hy))$.

Druga premisa tvrdi da bilo šta što je dečak jeste takvo da ono ne voli bilo koju dosadnu stvar, to jest takvo da bilo šta što je dosadno ono ga ne voli; da bismo to izrazili simbolima koristićemo 'B' za biti dosadna stvar:

(5) $(x)(Fx \rightarrow (y)(By \rightarrow \neg Hxv))$

Validni sekvent koji treba da dokažemo biće prema tome

124 $(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gv \rightarrow Hy)), (x)(Fx \rightarrow (y)(Bv \rightarrow \neg Hxy))$
$\vdash (x)(Gx \rightarrow \neg Bx)$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \,\&\, (v)(Gy \rightarrow Hxy))$	A
2	(2)	$(x)(Fx \rightarrow (v)(By \rightarrow \neg Hxy)$	A
3	(3)	$Fa \,\&\, (y)(Gy \rightarrow Hay)$	A
3	(4)	Fa	3 &E
3	(5)	$(y)(Gy \rightarrow Hay)$	3 &E
2	(6)	$Fa \rightarrow (y)(By \rightarrow \neg Hay)$	2 UE
2,3	(7)	$(y)(By \rightarrow \neg Hay)$	4,6 MPP
8	(8)	Gb	A
3	(9)	$Gb \rightarrow Hab$	5 UE
3,8	(10)	Hab	8,9 MPP
2,3	(11)	$Bb \rightarrow \neg Hab$	7 UE
3,8	(12)	$\neg\neg Hab$	10 DN

2,3,8	(13) ¬B*b*	11,12 MTT
2,3	(14) G*b*—> ¬B*b*	8,13 CP
2,3	(15) (*x*)(G*x*—> ¬B*x*)	14 UI
1,2	(16) (*x*)(G*x*—> ¬B*x*)	1,3,15 EE

Sa egzistencijalnim iskazom kao asumpcijom (1) prirodno je da pretpostavimo odgovarajući tipični disjunkt u redu (3) i težimo da odatle deriviramo konkluziju: otuda je konačni korak EE. Redovi (4)-(7) sastoje se samo od ´razradivanja´ konjunkcije u (3) pomoću &E i izvođenja najočitijeg konsekventa iz (4), F*a*, u redu (7). Da bismo dokazali (*x*)(G*x*—> ¬B*x*) tragamo za G*b*—> ¬B*b*, pa je otuda predzadnji korak UI. Tako pretpostavljamo G*b* u liniji (8) i tragamo za ¬B*b*. Središnji deo dokaza pripada uglavnom rasuđivanju pomoću iskaznog računa, koristeći univerzalne iskaze u redovima (5) i (7) u pojedinačnoj primeni na *b*. Sasvim opšta taktika otkrića sastoji se u tome da se u istom maniru napreduje ´sa oba kraja´; središnji deo željenog dokaza težiće tome da ima iskazni karakter i on će biti relativno lak.

Razmotrimo, na trećem mestu, sledeći argument:

(6) Neki botaničari su osobenjaci; neki botaničari ne vole nijednog osobenjaka; prema tome, neki botaničari nisu omiljeni od strane svih botaničara.

Koristeći F za biti botaničar, G za biti osobenjak, a H za voleti, imamo dve odgovarajuće premise za (6)

(7) (∃*x*)(F*x* & G*x*);
(8) (∃*x*)(F*x* & (*y*)(G*y*—> ¬H*xy*)).

Konkluzija potvrđuje da postoji nešto što je botaničar a nije kao svi botaničari i onda nije slučaj da su svi botaničari kao taj. U simbolima

(9) (∃*x*)(F*x* & ¬(*y*)(F*y*—> H*yx*)).

Prirodno je da ćemo, tražeći dokaz, pretpostaviti dva tipična disjunkta koji odgovarajući redu (7) i redu (8)

(10) F*a* & G*a*
(11) F*b* & (*y*)(G*y*—> ¬H*by*)

Ovo na odgovarajući način daje četiri stavke obaveštenja, a kao poseban slučaj univerzalnog iskaza (*y*)(G*y* —> ¬H*by*) imamo G*a* —> ¬H*ba*, odakle pomoću MPP dobijamo ¬H*ba*. Sada intuitivno tražimo nešto što je botaničar (F) i nije voljen od strane svih botaničara; takva stvar je *a*, pošto F*a* i *b*, što predstavlja botaničara, ne voli *a*. Tako težimo da dokažemo

(12) F*a* & ¬(*y*)(F*y*—> H*ya*).

Prvi konjunkt iz (12) neposredno sledi iz (10). Drugi može lako biti dokazan pomoću RAA; zato što pretpostavljajući $(y)(Fy \rightarrow Hya)$ imamo kao poseban slučaj $Fb \rightarrow Hba$, odakle je Hba u kontradikciji sa $\neg Hba$. Ovo intuitivno otkriće biva formalizovano na sledeći način:

125 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx), (\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow \neg Hxy))$
$\vdash (\exists x)(Fx \,\&\, \neg(y)(Fy \rightarrow Hyx))$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow \neg Hxy))$	A
3	(3)	$Fa \,\&\, Ga$	A
4	(4)	$Fb \,\&\, (y)(Gy \rightarrow \neg Hby)$	A
3	(5)	Fa	3 &E
3	(6)	Ga	3 &E
4	(7)	Fb	4 &E
4	(8)	$(y)(Gy \rightarrow \neg Hby)$	4 &E
4	(9)	$Ga \rightarrow \neg Hba$	8 UE
3,4	(10)	$\neg Hba$	6,9 MPP
11	(11)	$(y)(Fy \rightarrow Hya)$	A
11	(12)	$Fb \rightarrow Hba$	11 UE
4,11	(13)	Hba	7,12 MPP
3,4,11	(14)	$Hba \,\&\, \neg Hba$	10,13 &I
3,4	(15)	$\neg(y)(Fy \rightarrow Hya)$	11,14 RAA
3,4	(16)	$Fa \,\&\, \neg(y)(Fy \rightarrow Hya)$	5,15 &I
3,4	(17)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg(y)(Fy \rightarrow Hyx)$	16 EI
2,3	(18)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg(y)(Fy \rightarrow Hyx)$	2,4,17 EE
1,2	(19)	$(\exists x)(Fx \,\&\, \neg(y)(Fy \rightarrow Hyx)$	1,3,18 EE

Ovde su redovi (3) i (4) tipični disjunkti; redovi (5)-(10) izvode neposredne posledice iz (3) i (4); (11) je pretpostavljeno radi pripreme za RAA, a željena kontradikcija je dobijena u redu (14). Za EE u redu (18) treba imati u vidu da (3), na kojem počiva konkluzija i reda (17), ne sadrži '*b*', mada sadrži '*a*'.

I na kraju, pomalo nepregledan, mada validan argument, koji zahteva uvođenje predikatskog slova koje prate tri varijable:

(13) Ako neko govori sa nekim, tada ih je neko jedno sa drugim upoznao; niko ne upoznaje nekoga sa nekim ako ih i sam ne poznaje oboje; svako govori sa Williamom; prema tome svako je upoznat sa Williamom od strane nekoga ko ga lično poznaje.

Koristimo on da ´I*abc*´ za ´*a* upoznaje (introduces) *b* i *c*´ i ´F*ab*´ za ´*a* govori sa *b*´, ´G*ab*´ za ´*a* zna (knows) *b*´, a ´*m*´ za ´William´. Prva je premisa očigledno

(14) $(x)(y)(Fxy \rightarrow (\exists z)Izxy)$.

Iznova osmišljavajući drugu asumpciju dobijamo ´svako ko upoznaje bilo koga sa bilo kim zna ih oboje´, a koja postaje

(15) $(x)(y)(z)(Izxy \rightarrow Gzx \,\&\, Gzy)$.

Treća premisa je

(16) $(x)Fxm$,

a konkluzija

(17) $(x)(\exists y)(Iyxm \,\&\, Gym)$.

Intuitivno otkrivanje dokaza sada nije teško. Neka a bude neka proizvoljno izabrana osoba. Tada iz (16) imamo

(18) Fam.

Iz (14) kao poseban slučaj imamo

(19) $Fam \rightarrow (\exists z)Izam$,

odakle sledi

(20) $(\exists z)Izam$.

Pretpostavimo sada da proizvoljno izabrana osoba *b* upoznaje *a* sa *m*. Imamo I*bam*, odakle sledi, iz (15) pomoću MPP,

(21) $Gba \,\&\, Gbm$.

To daje

(22) $Ibam \,\&\, Gbm$,

odakle sledi

(23) $(\exists y)(Iyam \,\&\, Gym)$.

Željena konkluzija slediće sada na osnovu EE i UI. Formalno

126 $(x)(y)(Fxy \rightarrow (\exists z)Izxy)$, $(x)(y)(z)(Izxy \rightarrow Gzx \& Gzy)$, $(x)Fxm \vdash (x)(\exists y)(Iyxm \& Gym)$

1	(1)	$(x)(y)(Fxy \rightarrow (\exists z)Izxy)$	A
2	(2)	$(x)(y)(z)(Izxy \rightarrow Gzx \& Gzy)$	A
3	(3)	$(x)Fxm$	A
3	(4)	Fam	3 UE
1	(5)	$(y)(Fay \rightarrow (\exists y)Izay)$	1 UE
1	(6)	$Fam \rightarrow (\exists z)Izam$	5 UE
1,3	(7)	$(\exists z)Izam$	4,6 MPP
8	(8)	$Ibam$	A
2	(9)	$(y)(z)(Izay \rightarrow Gza \& Gzy)$	2 UE
2	(10)	$(z)(Izam \rightarrow Gza \& Gzm)$	9 UE
2	(11)	$Ibam \rightarrow Gba \& Gbm$	10 UE
2,8	(12)	$Gba \& Gbm$	8,11 MPP
2,8	(13)	Gbm	12 &E
2,8	(14)	$Ibam \& Gbm$	8,13 &I
2,8	(15)	$(\exists y)(Iyam \& Gym)$	14 EI
1,2,3	(16)	$(\exists x)(Iyam \& Gym)$	7,8,15 EE
1,2,3	(17)	$(x)(\exists y)(Iyxm \& Gym)$	16 UI

(16) ovde počiva na (1), (2) i (3) zato što (7) počiva na (1) i (3), a (15) počiva na (2) isto kao i tipični disjunkt (8). Svi ostali koraci su jednostavni.

Vežbe

1 Dokaži validnost sledećih sekvenata:
(a) $(x)(y)(z)Fxyz \vdash (z)(y)(x)Fxyz$
(b) $(x)(\exists y)(z)Fxyz \vdash (x)(z)(\exists y)Fxyz$
(c) $(\exists x)(\exists y)(z)Fxyz \vdash (z)(\exists y)(\exists x)Fxyz$

2 Pokaži validnost sledećih argumenata:
(a) Ako pada kiša ni jedna ptica nije sretna; ako pada sneg neke ptice su sretne; prema tome, ako pada kiša ne pada sneg (upotrebi 'P' za 'pada kiša', 'Q' za 'pada sneg').
(b) Sve kamile vole pažljive jahače; neke kamile ne vole Mohameda; Mohamed je jahač; prema tome Mohamed nije pažljiv.
(c) Sve kamile su vrlo osetljive životinje; neki jahači nevole vrlo osetljive životinje; prema tome neki jahači ne vole ni jednu kamilu.
(d) Neki psi vole Williama; svi dečaci vole sve pse; William je dečak; prema tome postoji nešto što ujedno i voli Williama i što William voli.
(e) Kit je sisar; neke ribe su kitovi; sve ribe imaju rep; prema tome neki riblji repovi su repovi sisara (upotrebi '*Tab*' za '*a* je rep od *b*').

POGLAVLJE 4

RAČUN PREDIKATA II

1 Pravila formiranja i pravila derivacije

Do sada je naše razmatranje predikatskog računa bilo u izvesnom smislu neformalno i sada je trenutak da za ovaj račun učinimo barem deo onoga što je učinjeno za iskazni račun u Poglavlju 2. U ovom poglavlju iznosim dosledna pravila formiranja za predikatski račun i zatim sasvim precizno utvrđujem četiri pravila derivacije koja sadrže kvantifikatore. U sledećem odeljku razmatram substituciju, uvođenje teoreme i uvođenje sekventa kakvi priliče predikatskom računu i utvrđujem, ali ne dokazujem, rezultate konzistencije i kompletnosti.

Paralelno sa raspravom u Poglavlju 2, Odeljak 1, počinjemo sa ostenzivnom definicijom vrsta simbola kojima baratamo. Definicije simbola iz Poglavlja 2 ovde se pretpostavljaju.
Prvo, određujem *vlastito ime* kao jednu od oznaka

'*m*', '*n*'... .

Drugo, određujem *proizvoljno ime* kao jednu od oznaka

'*a*', '*b*', '*c*',... .

Treće, određujem *individualnu varijablu* kao jednu od oznaka

'*x*', '*y*', '*z*',... .

Četvrto, određujem *predikatsko slovo* kao jednu od oznaka

'F','G','H',... .

U svakoj od ovih definicija, kao i u pređašnjoj definiciji iskazne varijable, teorijski pretpostavljamo da imamo na raspo-

laganju neograničeno veliki broj različitih takvih oznaka. Ovo je dokazano dodavanjem '...' nabrajanju. *x*', '*y*', '*z*' uopšteno ćemo nazivati jednostavno *varijable*, tako da je isključena opasnost da ih pomešamo sa *iskaznim* varijablama. Zaista, u privremene svrhe, iskazne varijable treba shvatiti kao one koje su obuhvaćene predikatskim slovima, kao što ćemo to videti u definiciji (datoj ispod) atomičke rečenice.

Peto, određujem *obrnuto* - E kao oznaku

'∃'.

S razlogom bi bilo pogodno imati reč koja bi obuhvatala i vlastita imena i proizvoljna imena. Zato određujem, kao šesto, da *termin* bude *ili vlastito ime ili proizvoljno ime*; od značaja je imati u vidu da termini *ne uključuju* varijable.

Sedmo, određujem *simbol (predikatskog računa)* kao *ili zagradu, ili logički veznik, ili termin, ili individualnu varijablu, ili predikatsko slovo* (shvaćeno tako da uključuje iskazne varijable) *ili obrnuto - ∃*. I osmo, odredjujem *formulu (predikatskog računa)* kao *bilo koji sled simbola*.

Sada preostaje, kao kod iskaznog računa, da iz totaliteta izdvojimo one formule koje hoćemo da uvrstimo u *dobro obrazovane* (well-formed) ili smislene. Zbog toga obrazujemo definiciju sa nizom uslova, kao i ranije, koja može biti shvaćena tako da pruža *pravila formiranja* za predikatski račun, ili da utvrđuje temeljnu sintaksu našeg novog jezika.

Počinjemo sa određivanjem atomičkih rečenica. Atomičke rečenice igraju onu ulogu u predikatskom računu koju iskazne varijable imaju u iskaznom računu: one su opeke od kojih su sazdane kompleksne dobro obrazovane formule. U ovoj i sledećim definicijama još jednom koristimo zamisao o metalogičkim varijablama da bismo predupredili raspravu o ovom jeziku. Biće neophodan sasvim složen poredak metalogičkih varijabli: zbog toga ćemo upotrebiti 'P' kao metalogičku varijablu čiji doseg su predikatska slova; 't', 't_1', 't_2',... kao metalogičke varijable čiji doseg su termini; 'v', 'v_1','v_2',... kao metalogičke varijable čiji su doseg varijable; kao i ostala rešenja.

Neka t_1,..., t_n budu bilo koji od *n*-termina (ne nužno različitih), gde je *n* veće od ili jednako sa 0, a P neka bude bilo koje predikatsko slovo. Tada je

$$Pt_1...t_n$$

atomička rečenica. Drugim rečima, atomička rečenica je predikatsko slovo praćeno bilo kojim (konačnim) brojem termina. Stoga su

'F*a*, 'G*m*', 'H*bn*', 'G*anmac*'

atomičke rečenice. Međutim,

'F*x*', 'H*xan*'

nisu atomičke, zato što '*x*' nije termin. U definiciji dopuštamo da broj termina bude 0. U ovom krajnjem slučaju, imamo zapravo iskaznu varijablu. 'F', 'G', 'H' na osnovu sopstvenih svojstava shvataćemo dosledno kao atomičke rečenice; ali tamo gde predikatsko slovo naslede termini biće pogodno još jednom upotrebiti slova 'P', 'Q', 'R'. Zbog toga se iskazna varijabla može shvatiti kao atomička rečenica u kojoj predikatsko slovo ne prati ni jedan termin.

Sada smo u prilici da odredimo *dobro obrazovanu formulu* (wff, well formed formula) *predikatskog računa* na sledeći način:

(a) bilo koja rečenica je wff;
(b) ako je A wff, tada je ¬A wff;
(c) ako su A i B wffs, tada je (A –> B) wff;
(d) ako su A i B wffs, tada je (A & B) wff;
(e) ako su A i B wffs, tada je (A v B) wff;
(f) ako su A i B wffs, tada je (A <–> B) wff;
(g) neka A(t) bude wff koja sadrži termin t i neka v bude neka varijabla koja se ne događa u A(t); neka A(v) bude formula koja proizlazi iz A(t) zamenom barem jednog događanja t sa v; tada je (v)A(v) wff;
(h) neka v bude neka varijabla, a A(v) neka bude formula kako je to opisano u (g); tada je (∃v)A(v) wff;
(i) ako formula nije wff s obzirom na uslove (a)-(h), tada ona nije wff.

Ova definicija iziskuje izvesno dodatno razmatranje. Prvo bi je trebalo uporediti sa definicijom wff u iskaznom računu iz Poglavlja 2. Naš novi uslov (a) je proširenje prvobitno datog uslova (a), pri čemu je 'iskazna varijabla' zamenjeno sa 'atomička rečenica'. Naša temeljna građa za wff sada uključuje iskazne varijable, ali još i nešto više od toga. Uslovi (b)-(f) su istovetni u

obe definicije; kao posledica toga, bilo koja wff iskaznog računa je takođe wff predikatskog računa. Odatle sledi da je predikatski račun kao jezik *proširenje* iskaznog računa. Uslovi (g) i (h) uvode univerzalni odnosno egzistencijalni kvantifikator, a uslov (i) je uobičajen isključujući ili ograničavajući uslov.

Uslovi (g) i (h) deluju na neobičan način; najbolje ćemo ih moći shvatiti pomoću primera. Pretpostavimo da želimo da pokažemo da

(1) (*x*)(F*x* --> G*x*)

jeste wff. Zapazi najpre da niti 'F*x*' niti 'G*x*' nije wff, zato što '*x*' nije termin, već varijabla. Prema tome, '(F*x* --> G*x*)' takođe nije wff; neophodno nam je da to bude tako, zato što želimo da sve naše wff izražavaju *iskaze*, a što 'F*x*' ne čini - formula koja sadrži varijablu jedino će izražavati iskaz kao istinit ili lažan ako je ta varijabla, uopšteno govoreći, vezana za kvantifikator i nije ostavljena da visi u vazduhu. Varijable su obrazovane kao vodilje za unakrsnu referenciju (cross-reference), a ne kao imena, zbog čega reći da '*x* ima svojstvo F' nije isto što i reći da je nešto istinito ili lažno zato što ovde ništa nije imenovano. Međutim, reći da '(*x*)F*x*' jeste što i reći da sve ima svojstvo F, a to je isto što i reći da je nešto istinito ili lažno. Vidi str. 165.

Mada '(F*x* --> G*x*)' nije wff, '(F*a* --> G*a*)' jeste wff, zato što 'F*a*' i 'G*a*', za razliku od 'F*x*' i 'G*x*', jesu atomičke rečenice. U uslovu (g), neka t bude termin '*a*' i neka A(t) bude wff '(F*a* --> G*a*)' koja sadrži ovaj termin. Neka v bude varijabla '*x*'. Tada je '(F*x* --> G*x*)' formula koja proizilazi iz A(t), naime '(F*a* --> G*a*)' na osnovu zamenjivanja barem jednog događanja '*a*' za '*x*' (u stvari oba događanja '*a*' su zamenjena). Otuda '(F*x* --> G*x*)', mada nije *dobro obrazovana* formula, jeste A(v) koja je primerena uslovu (g). Odatle je na osnovu uslova (g) ishod stavljanja prefiksa '(*x*)' uz '(F*x* --> G*x*)' čini wff: drugim rečima, (1) je wff.

Na sličan način, preoblikujući '(F*a* --> G*a*)' u '(F*x* --> G*a*)', ili u '(F*a* --> G*x*)' (tj. pomoću promene samo jednog događanja '*a*' u '*x*'), pokazujemo na osnovu uslova (g) da

(2) (*x*)(F*x* --> G*a*)

i

(3) (*x*)(F*a* --> G*x*)

jesu wff. Ali nema načina da pokažemo da je

(4) $(x)(Fa \rightarrow Ga)$

wff, zato što uslov (g) stvarno stipulira da će se v dogoditi negde u A(v), dok se 'x' neće dogoditi u '$(Fa \rightarrow Ga)$'; ne želimo da (4) shvatimo kao dobro obrazovanu, zato što kvantifikator '(x)' ne nadzire nijedno dogadanje varijable.

Uslov (g) vodi nas od wff A(t), koja sadrži izvestan termin t, via *ne*-dobro obrazovane formule A(v) koja sadrži umesto nekih dogadanja t varijablu v koja nije vezana za kvantifikator, do *nove* wff (v)Av u kojoj ova dogadanja v *jesu* pod nadzorom kvantifikatora koji je na mestu prefiksa. Na ovaj način smo sigurni da takvi izrazi kao što je (4), '$(x)P$', '$(x)Fm$' nisu dobro obrazovane formule.

Dalja stipulacija (g) jeste da se v neće dogoditi u A(t). Bez ove stipulacije,

(5) $(x)(x)Fxx$

bi bila dobro obrazovana. Zato što je 'Faa' atomička rečenica, odakle na osnovu onoga što tvrdi uslov (g) '$(x)Fxa$' jeste wff (uzmi neka A(v) bude 'Fxa'); uzimajući '$(x)Fxa$' kao A(t), 'a' kao t i 'x' kao v, za A(v) bismo imali '$(x)Fxx$', odakle bi (5) bila dobro obrazovana. Mi bismo želeli da (5) ne prihvatimo kao dobro obrazovanu zato što prvi univerzalni kvantifikator ne obavlja nikakav zadatak, dok dva dogadanja 'x' koja stoje iza 'F' nadzire drugi kvantifikator. Zapravo, na osnovu (g), (5) nije dobro obrazovana, zato što se 'x' već dogada u '$(x)Fxa$' i zato ne može biti upotrebljeno u primeni (g). Mi naravno možemo izabrati 'y' kao v i tako pokazati da

(6) $(y)(x)Fxy$

jeste wff.

Kao dalju ilustraciju upotrebe (g), uporedi dve formule

(7) $(x)(Fx \rightarrow (x)Gx)$
(8) $((x)Fx \rightarrow (x)Gx)$.

Tada (7) nije wff, ali (8) jeste. (8) se može sagledati kao dobro obrazovana na osnovu uslova (c), zato što '$(x)Fx$' i '$(x)Gx$' oči-

gledno jesu wffs. (7) je kao wff odbačena na osnovu stipulacije u uslovu (g) koja kaže da se v neće dogoditi u A(t). Jedine moguće wffs A(t) koje bi mogle učiniti (7) prihvatljivom jesu takve formule kao što su '(F*a* —> (*x*)G*x*)', '(F*m* —> (*x*)G*x*)', koje već sadrže varijablu '*x*'. Naravno, birajući varijablu, recimo '*y*', možemo pokazati da

(9) (*y*)(F*y*—> (*x*)G*x*)

jeste wff.

Mada takve formule kao što su 'F*x*', '(F*y* —> (*x*)G*x*)', 'H*xy*' na osnovu naše važeće definicije ne ubrajamo u wffs, zato što nisu potpune rečenice koje izražavaju iskaze kao istinite ili lažne s obzirom na 'neodređene' varijable '*x*' i '*y*', bilo bi od koristi da nadalje imamo oznake za njih. Sledićemo logičku tradiciju i upotrebljavaćemo epitet 'iskazna funkcija'[14]. Da bismo bili sasvim određeni, formula A je *iskazna funkcija za varijable* v_1,..., v_n, pri čemu je *n* veće od ili jednako sa 0, ako je $(v_1)...(v_n)$A wff. Stoga je 'H*xy*' iskazna funkcija za '*x*' i '*y*' zato što je '(*x*)(*y*)H*xy*' wff; '(F*y*—> (*x*)G*x*)' je iskazna funkcija za '*y*' zato što je (9) wff; ali '(F*x* —> (*x*)G*x*)' nije iskazna funkcija za '*x*' zato što, kao što smo to videli, (7) nije wff. Ukratko, formule koje proizilaze iz izuzimanja inicijalnog kvantifikatora iz wffs jesu iskazne funkcije. U uslovu (g) A(v) će biti iskazna funkcija za v. Dopuštajući takav slučaj kod kojega je *n*=0, sve wffs su trivijalne iskazne funkcije za nijednu varijablu, tako da možemo upotrebiti nešto slobodniju oznaku 'iskazna funkcija' da bismo obuhvatili wffs, što nastavljamo da činimo i nadalje.

Uslov (h) ne iziskuje posebno razmatranje pošto on samo uvodi egzistencijalni kvantifikator u naš simbolizam pod sasvim istim uslovima koji su upotrebljeni u slučaju univerzalnog kvantifikatora.

Dva kvantifikatora sintaktički određujemo na sledeći način: *univerzalni kvantifikator* jeste leva zagrada, praćena varijablom koju sledi desna zagrada; *egzistencijalni kvantifikator* jeste leva

14 Koja reč o reči 'funkcija' ovde neće biti naodmet: '*x* + *y*' jeste (ili, time se izražava) *numerička* funkcija za *x* i *y*, pošto, za date brojeve *x* i *y*, *x* + *y* jeste pojedinačan *broj*; 'F*xy*' jeste (ili, time se izražava) *iskazna* funkcija za *x* i *y* u tom smislu što, za date individue *x* i *y* iz nekog univerzuma govora unutar kojeg F ukazuje na relaciju, F*xy* jeste (ili, izražava) pojedinačan *iskaz*.

zagrada, praćena obrnutim E koje sledi varijabla, nakon koje dolazi desna zagrada; *kvantifikator* jeste ili univerzalni kvantifikator ili egzistencijalni kvantifikator. Pojam *dosega* se u tom slučaju može preuzeti iz iskaznog računa tako da važi za predikatski račun. Doseg nekog događanja logičkog veznika u iskaznoj funkciji jeste *najkraca iskazna funkcija u kojoj se on događa*. Tako u (9) doseg (jedinačnog događanja) ´–>´ jeste ´(F*y* –> (*x*)G*x*)´, što je iskazna funkcija za ´*y*´ a ne wff. Slično tome, *doseg* događanja kvantifikatora u iskaznoj funkciji jeste *najkraća iskazna funkcija u kojoj se on događa*. Tako u (8) doseg prvog ´(*x*)´ jeste ´(*x*)F*x*´, a doseg drugog ´(*x*)´ jeste ´(*x*)G*x*´; u (9) doseg (jedinačnog događanja) ´(*y*)´ jeste cela wff (9); u (6) doseg ´(*y*)´ jeste cela wff (6), ali doseg ´(*x*)´ zato jeste ´(*x*)F*xy*´ - što je u ovom slučaju iskazna funkcija, a ne wff; u iskaznoj funkciji ´(F*y* –> (*x*)G*x*)´ doseg ´(*x*)´ je wff ´(*x*)G*x*´.

Koristeći pojam dosega možemo utvrditi uticaj uslova (g) i (h) na sledeći način:

(i) doseg bilo kojeg događanja kvantifikatora u wff ili iskaznoj funkciji sadržaće *barem dva* događanja varijable o kojoj je reč (budući da je jedno sadržano već u samom kvantifikatoru)

(ii) doseg bilo kojeg događanja kvantifikatora u wff ili iskaznoj funkciji neće obuhvatati nijedan drugi kvantifikator koji koristi tu *istu* varijablu.

Na primer, (4), s obzirom na (i), nije dobro obrazovana; zbog toga, što postoji samo jedno događanje ´*x*´ i to u samom kvantifikatoru. A s obzirom na (ii), (5) i (7) nisu dobro obrazovane, zbog toga što u navodnom opsegu prvog ´(*x*)´ u oba slučaja postoji dodatno ´(*x*)´. (8) uspeva da izbegne ovoj primedbi, zato što nijedan od dosega oba kvantifikatora nije uključen u doseg drugog. Motiv zahteva za (i) i (ii) bi od sada trebalo da je jasan; s obzirom na (i), svaki kvantifikator nadzire *neko* događanje njegove varijable, t.j. on nikada nije upotrebljen *uzalud*; s obzirom na (ii) *svako* događanje kvantifikatorove varijable je unutar dosega nadzirano tim a ne nekim drugim kvantifikatorom. Da bismo obezbedili (i) i (ii), plaćamo izvesnu cenu koja se sastoji u složenosti pravila formiranja; ono što time dobijamo

nadoknađuje nam jednostavnost kako stava o pravilima derivacije tako i daljih deriviranih pravila.

Što se tiče zagrada, treba imati u vidu da su uslovi (g) i (h) nalik uslovu (b) za ¬, zbog toga što on ne iziskuje obuhvatajuće zagrade. Dvosmislenost je odagnata zahtevima koji se odnose na zagrade u uslovima (c)-(f). Tako (9), u kojoj je doseg '(*y*)' cela wff, treba da bude stavljeno nasuprot

(10) ((*y*)F*y*—> (*x*)G*x*),

gde je doseg '(*y*)' samo '(*y*)F*y*'. (9) izražava univerzalni iskaz, dok (10) izražava kondicionalni iskaz čiji antecedent i konsekvent predstavljaju univerzalni iskazi. Razlika među njima je pouzdana na osnovu zagrada koje su potrebne za '—>' u uslovu (c). Što se tiče prakse, nasuprot teoriji, dozvolićemo sebi, kao što je to bio slučaj i ranije, da izostavljamo spoljašnje zagrade i da izostavljamo unutrašnje zagrade tamo gde god je to moguće s obzirom na raspoređivanje iskaznih veznika, a što je bilo uvedeno u Poglavlju 2, Odeljak 1.

Konačno, kada je dato da su $A_1, \ldots, A_n$, B wffs predikatskog računa, kažemo da je

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

sekvent-izraz predikatskog računa.

Sa dosledno formulisanom sintaksom predikatskog računa možemo vrlo lako utvrditi pravila derivacije. Prvo, treba napomenuti da je deset osnovnih pravila iskaznog računa preuzeto *in toto* i ovde je shvaćeno tako da se primenjuju na wffs predikatskog računa. Ovo obezbeđuje istovremeno i to da je bilo koji derivabilni sekvent iskaznog računa takođe i derivabilni sekvent predikatskog računa. Kao četiri posebna pravila predikatskog računa pridodaćemo sledeće:

UE i EI: neka A(v) bude iskazna funkcija za v, a t neka bude termin; neka A(t) bude ishod zamenjivanja svih i jedino događanja v u A(v) sa t. Tada, kada je dato (v)A(v), UE nam dopušta da izvedemo konkluziju A(t). A kada nam je dato A(t), EI nam dopušta da izvedemo konkluziju (∃v)A(v). U svakom od slučajeva konkluzija se zasniva na istoj asumpciji kao premisi.

UI i EE: neka A(e) bude wff koja sadrži proizvoljno ime e, a v neka bude varijabla koja se ne događa u A(e); zamenjivanja

svih i jedino onih događanja e u A(e) sa v. Tada, kada je dato A(e), UI nam dopušta da deriviramo konkluziju (v)A(v), s tim što se e ne događa ni u jednoj asumpciji u kojoj A(e) ostaje. Konkluzija ostaje u istoj asumpciji kao premisa. A kada je dato (∃v)A(v), zajedno sa dokazom neke wff C iz A(e) kao asumpciji, EE nam dopušta da deriviramo konkluziju C, s tim što se e ne događa u C ili bilo kojoj asumpciji upotrebljenoj da se derivira C iz A(e) (sem iz samog A(e)). Konkluzija C počiva na bilo kojoj od asumpcija od koje zavisi (∃v)A(v) ili koje su upotrebljene da se derivira C iz A(e) (nezavisno od A(e)).

Kao i kod UE i EI, prvo moramo zapaziti da ako je A(v) iskazna funkcija za v, tada ce i (v)A(v) i A(t), prema određenju, biti *dobro obrazovane*. Na primer, uzimajući v kao '*x*', A(v) kao 'F*x* --> G*xam*', a t kao '*a*', (v)A(v) je '(*x*)(F*x* --> G*xam*)', a A(t) je 'F*a* --> G*aam*', pri čemu su obe wffs. Imaj u vidu takođe i to da nije važno ako se t već događa u A(v), kao što se '*a*' ovde već događa u 'F*x* --> G*xam*'. Očito je sasvim osnovano zaključiti na 'F*a* --> G*aam*' iz '(*x*)(F*x* --> F*xam*)'. Kao treće, imaj u vidu da t mora zameniti v u *svim* njegovim događanjima, sem u slučaju da ishod toga nije dobro obrazovan. Konačno, imaj u vidu da je kod EI doseg dosledno istovetan dosegu kod UE, sem u *obrnutom* slučaju: to jest, da bi se videlo da je korak EI osnovan, možemo ga razmotriti u obrnutom smeru kao korak UE i proveriti ga. Na primer, preći sa 'F*a* & G*b*' na '(∃*x*)(F*x* & G*x*)' jeste neosnovan korak EI, samo zato što bi preći sa '(*x*)(F*x* & G*x*)' na 'F*a* & G*b*' bio neosnovan korak UE. (Zašto?) Ova dva pravila su u ovom smislu simetrična.

Kao kod UI i EE, moramo prvo zapaziti da, zato što se v ne događa u A(e), A(v) će biti iskazna funkcija za v, zato što u sebi neće sadržati nijedan kvantifikator sa v, ali će sadržati samo v. Tako će i (v)A(v) i (∃v)A(v) biti wffs. U primeni UI, prema tome, potrebno nam je da izaberemo neku varijablu koja nije već prisutna u premisi: ne možemo preći sa 'F*a* --> (*x*)G*x*' na '(*x*)(F*x* --> (*x*)G*x*)', zato što pretpostavljena konkluzija nije dobro obrazovana, mada možemo preći, ako su ograničenja uzeta u obzir, na (*y*)(F*y* --> (*x*)G*x*)'. Obratno, kada želimo da upotrebimo EE, da bismo dobili pogodni tipični disjunkt koji je odgovarajući za (∃v)A(v), trebalo bi izabrati proizvoljno ime e *koje se već ne događa* u (∃v)A(v) i staviti e umesto v u *svim i samo* njegovim

događanjima u iskaznoj funkciji A(v). Na ovaj način dobijamo A(e) takvo da se v ne događa u njemu i takvo da, kada je v vraćeno nazad namesto e, ponovo dobijamo prvobitnu A(v). Na primer, ako je kao (∃v)A(v) data wff '(∃*x*)(F*a* —> G*xb*)', biramo e kao '*c*', a *ne* kao '*a*' ili '*b*', te pretpostavljamo 'F*a* —> G*cb*' kao A(e). Onda će A (v) za v kao 'x' biti propozicijska funkcija 'F*a* —> G*xb*'. Ne bi bilo naodmet naglasiti da UI i EE, kao i UE i EI, predstavljaju izvesnu simetričnost, tako što je A(e) odgovarajući tipični disjunkt za (∃v)A(v), baš kao u slučaju kada (v)A(v) sledi iz A(e) na osnovu UI.

Čitalac će zapaziti da su ovde data ograničenja za UI i EE upravo ona ograničenja koja smo intuitivno propisali u poslednjem poglavlju. Takođe, on bi trebalo da bude zadovoljan time što primene ova četiri pravila, koja su data u poslednjem poglavlju, jesu ispravne u svetlu njihove ovde dosledno date formulacije; to će opravdati razmatranje nešto težih slučajeva.

V e ž b e

1 Za svaku od sledećih formula utvrdi da li je wff, da li je iskazna funkcija koja nije wff, ili nijedno od ta dva. U slučaju da jeste wff, prikaži to na osnovu definicije wff.

(a) (*x*)G*xa*
(b) (*x*)G*ya*
(c) (*x*)G*xy*
(d) (∃*x*)(F*a* & G*x*)
(e) (∃*y*)(F*x* & G*xy*)
(f) (*x*)(∃*y*)(∃*z*)(F*y* v G*z* —> H*ayz*)
(g) (∃*x*)(∃*y*)(F*x* v G*y* —> (∃*z*)H*ayz*)
(h) (∃*x*)(∃*y*)(F*x* —> (*z*)(G*z* —> (∃*x*)H*xyz*))
(i) (∃*x*)(F*x* —> (*z*)(G*z* —> (∃*u*)H*xyu*))
(j) (∃*y*)((∃*x*)F*x* —> (*z*)(G*z* —> (∃*x*)H*xyu*))

2 Za svaku od sledećih predloženih primena UE utvrdi da li je ispravna ili neispravna i ako je neispravna kaži zašto.

(a) 1 (1) (*x*)(∃*z*)(F*xy* & G*xz*) A
 1 (2) (∃*z*)(F*aa* & G*az*) 1 UE
(b) 1 (1) (*x*)(∃*z*)(F*xz* & G*xz*) A

	1	(2) $(\exists z)(Faz \& Gbz)$	1 UE
(c)	1	(1) $(x)(\exists z)(Fxz \& Gxz)$	Λ
	1	(2) $(\exists z)(Fbz \& Gbz)$	1 UE

3 Za svaku od sledećih predloženih primena EI utvrdi da li je ispravna ili neispravna i ako je neispravna kaži zašto.

(a)	1	(1) Fba	Λ
	1	(2) $(\exists y)Fby$	1 EI
(b)	1	(1) Fba	Λ
	1	(2) $(\exists x)Fxx$	1 EI
(c)	1	(1) Fba	Λ
	1	(2) $(\exists y)Fya$	1 EI
(d)	1	(1) Fba	Λ
	1	(2) $(\exists x)Fxb$	1 EI
(e)	1	(1) $(\exists x)Fxa$	Λ
	1	(2) $(\exists y)(\exists x)Fxy$	1 EI
(f)	1	(1) $(\exists x)Fxa$	Λ
	1	(2) $(\exists y)(\exists x)Fxx$	1 EI

4 Za svaku od sledećih predloženih primena UI utvrdi da li je ispravna iil neispravna i ako je neispravna kaži zašto; pretpostavi da se ni ´*a*´ ni ´*b*´ ne događa u asumpciji (1).

(a)	1	(3) $Fab \rightarrow (x)Gax$	
	1	(4) $(y)(Fyb \rightarrow (x)Gyx)$	3 UI
(b)	1	(3) $Fab \rightarrow (x)Gax$	
	1	(4) $(x)(Fxb \rightarrow (x)Gxx)$	3 UI
(c)	1	(3) $Fab \rightarrow (x)Gax$	
	1	(4) $(y)(Fay \rightarrow (x)Gax)$	3 UI
(d)	1	(3) $Fab \rightarrow (x)Gax$	
	1	(4) $(y)(Fyy \rightarrow (x)Gyx)$	3 UI

5 Za svaki od sledećih parova wffs utvrdi da li je drugi član odgovarajući tipični disjunkt prvog kod primene EE i ako je neodgovarajući kaži zašto.

(a) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, (y)Gby)$
(ii) $Fba \,\&\, (y)Gby$
(b) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, (y)Gby)$
(ii) $Fca \,\&\, (y)Gcy$
(c) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, (y)Gby)$
(ii) $Fca \,\&\, (y)Gby$
(d) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, Gbx)$
(ii) $Fca \,\&\, Gbc$
(e) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, Gbx)$
(ii) $Fba \,\&\, Gbb$
(f) (i) $(\exists x)(Fxa \,\&\, Gbx)$
(ii) $Fbm \,\&\, Gbm$

2 Substitucija, derivirana pravila, konzistencija i kompletnost

Pojam teoreme predikatskog računa analogan je pojmu teoreme iskaznog računa. *Teorema je konkluzija dokazivog sekventa predikatskog računa u kome je broj asumpcija jednak nuli.* Odavde odmah sledi da su sve teoreme iskaznog računa teoreme u širem smislu. Trebalo bi takođe da je očigledno i to da za svaki dokazni sekvent iz prethodnog poglavlja postoji odgovarajući kondicional koji je dokaziv kao teorema tako što se dati dokaz dopunjuje koracima CP. Na primer, za sekvente 103 i 105 postoje odgovarajuće teoreme:

127 $\vdash (x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow ((x)Fx \rightarrow (x)Gx)$;
128 $\vdash (x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow ((\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx)$.

Druge teoreme koje na nivou predikatskog računa odgovaraju zakonima ne-kontradikcije (37), identiteta (38) i isključenja trećeg (44), čiji su dokazi laki, jesu:

129 $\vdash (x) \neg(Fx \,\&\, \neg Fx)$;
130 $\vdash (x)(Fx\ Fx)$;
131 $\vdash (x)(Fx \vee \neg Fx)$.

Kao u iskaznom računu i ovde se date teoreme mogu prihvatiti kao preuzete logičke istine, odnosno iskazi koji su istiniti naprosto na logičkim osnovama. Značajno svojstvo koje smo ranije uvideli da imaju teoreme iskaznog računa sastoji se u tome što

one ostaju logičke istine *koji god* iskazi da su izabrani namesto P, Q, R,...; ova je činjenica otelovljena u načelu substitucije (S1), koje kaže da bilo koji slučaj substitucije teoreme jeste teorema. Ovde bi prirodno bilo pretpostaviti da će teoreme predikatskog računa ostati logičke istine koja god *svojstva* da su izabrana namesto F, G, H,... Zato ono što prvo tražimo jeste odgovarajuće proširenje pojma slučaja substitucije koji će obuhvatiti ***substituciju za predikatska slova uopšte***, a ne samo iskaznih varijabli.

Po običaju svojstva možemo shvatiti tako kao da ih izražavaju ***iskazne funkcije***. Tako je svojstvo F izraženo pomoću iskazne funkcije 'Fx' za 'x'; svojstvo biti oba i F i G propozicijskom funkcijom 'Fx & Gx' za 'x'; svojstvo preuzimanja relacije F prema svemu, pomoću iskazne funkcije '(y)Fxy' za 'x'. Slično, relacije možemo shvatiti tako kao da ih izražavaju iskazne funkcije sa više od jedne varijable. Tako '(∃x)(Gxz & Gzy)' za 'x' i 'y' izražava složenu relaciju preuzimanja relacije G prema nečemu što dalje preuzima G. (Ako je 'G' uzeto da bude 'otac od', tada je nova relacija 'deda od'.) U tom slučaju je problem substitucije taj kako unutar wffs dosledno smeniti predikatska slova, koja prati izvestan broj termina ili varijabli, iskaznim funkcijama sa istim brojem varijabli.

Jednostavan primer trebalo bi ovo da učini jasnim. Uzmimo teoremu 131; tada ako je 'Fx' u svoja dva događanja substituiran *bilo kojom* iskaznom funkcijom u 'x', trudićemo se da ovaj rezultat shvatimo kao slučaj substitucije. Prema tome, ako smo izabrali '(Fx & Gx)', dobijamo,

(1) (x)((Fx & Gx) v ¬(Fx & Gx)),

ali, ako smo izabrali '(y)Fxy', dobijamo

(2) (x)((y)Fxy v ¬(y)Fxy),

i obe će izražavati logičke istine kao što to čini i 131, zato što očekujemo da je 131 istinito nezavisno od stvarnog izbora svojstva F.

Međutim, izvesne teškoće povezane su sa utvrđivanjem pojma slučaja substitucije u njegovoj punoj opštosti. Uzmimo, prvo, već dokazanu teoremu (x)Fx –> (y)Fy (uporedi 115). Ako želimo da substituiramo F sa svojstvom biti i F i G biće nam neophodno da stavimo '(Fx & Gx)' umesto 'Fx', ali i '(Fy & Gy)' umesto 'Fy'.

Ili, razmotri teoremu $(x)Fx \rightarrow Fa$. Imajući na umu isto substituiranje, ovde je neophodno da stavimo '$(Fx \& Gx)$' umesto 'Fx', ali i '$(Fa \& Ga)$' umesto 'Fa'. Drugim rečima, u substituciji za predikatsko slovo nećemo naprosto stavljati *istu tu* formulu u svakom od njenih događanja; ono što ćemo staviti zavisiće delom od toga koji termini ili varijable *slede* predikatsko slovo. Drugo, ako želimo da dobijemo *dobro obrazovanu formulu* nakon substitucije, mogu nam zatrebati izvesne varijable koje se događaju u kvantifikatorima u datoj iskaznoj funkciji. Na primer, substitucija 'F' u '$(x)Fx \rightarrow (y)Fy$' pomoću '$(y)Fxy$' dovešće do '$(x)(y)Fxy \rightarrow (y)(y)Fyy$', što nije dobro obrazovano s obzirom na udvostručeno '(y)'. Zbog toga bi trebalo da upotrebimo iskaznu funkciju '$(z)Fxz$', koja pregledno izražava isto svojstvo, da bismo izbegli nesklad među varijablama. Ovo pruža ispravno '$(x)(z)Fxz \rightarrow (y)(z)Fyz$'.

Imajući u vidu ove činjenice, pokušajmo da odredimo sasvim uopšteno slučaj substitucije. Biće od pomoći da imamo neku privremenu oznaku i za termine i za varijable: nazovimo ih naprosto *slova*, tada su 'a', 'b', 'm', 'n', 'x', 'y', itd, sve redom slova.

Neka A bude wff predikatskog računa koja sadrži (događanja uključena u) predikatsko slovo P koje prati n slova. Neka $Q(v_1, ..., v_n)$ bude iskazna funkcija u n različitih varijabli $v_1, ..., v_n$, tako da se nijedna njena varijabla u kvantifikatoru u $Q(v_1, ..., v_n)$ ne događa u A. Za bilo koji skup od n slova $l_1, ..., l_n$, neka $Q(l_1, ..., l_n)$ bude ishod substitucije v_1 sa l_1, v_2 sa $l_2, ..., v_n$ sa l_n, u celoj $Q(v_1, ..., v_n)$. Neka A´ proizilazi iz A na osnovu substitucije u A slova $l_1, ..., l_n$ svakog događanja $Pl_1, ..., l_n$, sa $Q(l_1, ..., l_n)$. Tada kažemo da A´ *proizilazi iz A putem substitucije*.

A´ proizilazi pomoću substitucije, grubo rečeno, u slučaju kada je jedno predikatsko slovo u A na odgovarajući način dosledno substituirano izrazima dobijenim iz izvesne iskazne funkcije. Kada dozvoljavamo *mnoštvo* substitucija predikatskih slova u A kažemo da je A´ *slučaj substitucije* za A tamo gde postoji sled wffs takav da je A prvi član, od kojih svaki proizilazi pomoću substitucije iz svojeg prethodnika u sledu, a u kojem je A´ poslednji član. Tako je A´ slučaj substitucije A, pri čemu ono proizilazi na osnovu substitucije iz neke wff koja opet proizilazi pomoću substitucije iz neke wff... koja opet tako redom proizilazi iz A. Kao granični slučaj, možemo dopustiti kao trivijalno da A bude uzeto kao slučaj substitucije sebe same.

Ilustrovaću ovo određenje jednim primerom koji je daleko složeniji od onih sa kojima se susrećemo u praksi. Neka A bude

(3) $(x)(Fxa \rightarrow Fba) \rightarrow (\exists y)((x)Fxx \rightarrow Fby)$

i razmotrimo iskaznu funkciju

(4) $(u)(Fuyz \,\&\, Gzya)$

za varijable '*y*' i '*z*'. Neka P bude predikatsko slovo 'F' u (3), koje prate dva slova. Tada je (4) odgovarajuće $Q(v_1,...v_n)$ za substituciju, zato što je ono iskazna funkcija s obzirom na dve varijable '*y*' i 'z' i njena jedina varijabla u kvantifikatoru, naime 'u', ne događa se u (3). Postoje četiri događanja 'F' u (3) koja treba razmotriti, naime:

(i) Fxa
(ii) Fba
(iii) Fxx
(iv) Fby.

Četiri odgovarajuće verzije iskazne funkcije (4) dobijene su putem substitucije '*y*' i '*z*' u okviru (4) pomoću prvog i drugog slova, koja se događaju posle F. Tako dobijamo

(i)′ $(u)(Fuxa \,\&\, Gaxa)$
(ii)′ $(u)(Fuba \,\&\, Gaba)$
(iii)′ $(u)(Fuxx \,\&\, Gxxa)$
(iv)′ $(u)(Fuby \,\&\, Gyba)$.

Tako (i)′-(iv)′ su $Q(l_1,...,l_n)$ za $Pl_1,...,l_n$, koje je dobijeno na osnovu (i)-(iv). Ako substituiramo sada (i)-(iv) u (3) pomoću (i)′-(iv)′, dobijamo

(5) $(x)((u)(Fuxa \,\&\, Gaxa) \rightarrow (u)(Fuba \,\&\, Gaba)) \rightarrow$
$(\exists y)((x)(u)(Fuxx \,\&\, Gxxa) \rightarrow (u)(Fuby \,\&\, Gyba))$.

Tada (5), na osnovu datog određenja, proizilazi iz (3) pomoću substitucije i zato je slučaj substitucije za (3).

U slučaju kada ne n=0, predikatsko slovo P je jednostavno iskazna varijabla, a iskazna funkcija $Q(v_1,...,v_n)$ naprosto wff. Substitucija se tada sastoji u sistematskom stavljanju neke wff namesto svih događanja neke iskazne varijable u A, a pojam slučaja substitucije se u tom slučaju pretače u onaj koji je već ranije

odreden za iskazni račun[15]. Odatle sledi da naš raniji pojam nije ništa više do poseban slučaj slučaja koji sada razmatramo.

Sada smo u prilici da ustanovimo načelo substitucije za predikatski račun:

(S 1) Moze se pronaći dokaz za bilo koji slučaj substitucije dokazane teoreme.

Ovo načelo daleko je od očiglednog i nije ga lako dokazati. Njegovo dokazivanje prevazilazi doseg ove knjige. (Zainteresovani čitalac bi trebalo da konsultuje, e.g., Church /2/, §35.) Ali njegov dokaz bi se sastojao u pokazivanju da je, prvo, slučaj substitucije uvek *wff* (a ne trivijalni ishod) i drugo, da dokaz za A može biti oblikovan u dokaz bilo kojeg slučaja substitucije A, na taj način što primene četiri pravila za kvantifikatore primenjujemo ispravno. Uopšte uzevši, to nije lako pokazati, zbog ograničenja koja važe za pravila UI i EE. Novi dokaz može na odgovarajući način biti povezan i sa promenom upotrebljenih proizvoljnih imena, zato što proizvoljno ime može biti uvedeno u slučaju substitucije i nezavisno od prvobitnog dokaza.

Konačno, pojam slučaja substitucije može biti proširen i na sekvente u celini. Ovo je najjednostavnije učiniti *via* pojma odgovarajućeg kondicionala. Kao i ranije, ako je

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B,$$

sekvent izraz, njegov *odgovarajući kondicional* je wff

$$A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots).$$

Tada kažemo da je

$$A_1', \ldots, A_n' \vdash B'$$

slučaj substitucije za

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

---

15 Međutim, na nivou predikatskog računa još je neophodno da sagledamo ograničenje po kojem wff koja je substitucija neće sadržati nijednu individualnu varijablu koja se već događa u A: bez ovoga ograničenja rezultat ne mora biti dobro obrazovan -na primer, aubstitucija 'P' u '$(x)(Fx \rightarrow P)$' sa '$(x)Gx$' vodi ka loše obrazovanoj formuli.

ako je odgovarajuci kondicional pređašnjeg sekvent-izraza slučaj substitucije u smislu određenom odgovarajućim kondicionalom potonjeg sekvent-izraza. Ovo vodi ka sledećem obuhvatnijem načelu substitucije, koje uključuje (S´1) kao poseban slučaj:

(S´2) Može se pronaći dokaz za bilo koji slučaj substitucije dokazanog sekventa.

Kada smo već obavili ovaj posao iz njega neposredno slede derivirana pravila TI i SI za predikatski račun[16]. Ona se naprosto mogu prepisati iz Poglavlja 2, a njihovo opravdanje na novom nivou ne predstavlja nikakve nove teškoće. Kao u iskaznom računu, ova derivirana pravila u mnogome smanjuju kabastost dokaza.

Ova derivirana pravila ilustrovana su sledećim dokazima:

132 $(x)Fx \vdash (x)(Gx \rightarrow Fx)$

1	(1)	$(x)Fx$	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	$Ga \rightarrow Fa$	2 SI(S) 50
1	(4)	$(x)(Gx \rightarrow Fx)$	3 UI

133 $(x)\neg Fx \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$(x)\neg Fx$	A
1	(2)	$\neg Fa$	1 UE
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	2 SI(S) 51
1	(4)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	3 UI

134 $(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$	A
2	(2)	$\neg(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3)	$(x)\neg(Fx \rightarrow Gx)$	2 SI(S) 3.4.1(d)
2	(4)	$\neg(Fa \rightarrow Ga)$	3 UE
2	(5)	$Fa \& \neg Ga$	4 SI(S) 2.2.5(g)
2	(6)	Fa	5 &E
2	(7)	$\neg Ga$	5 &E
2	(8)	$(\exists x)Fx$	6 EI

[16] U stvari, prilika u kojoj smo sebi dopustili korišćenje ovih pravila iskorišćena je u Poglavlju 3, ali samo u vezi sa krajnje elementarnim sekventima iskaznog računa.

2	(9)	$(x)\neg Gx$	7 UI
1,2	(10)	$(\exists x)Gx$	1,8 MPP
1,2	(11)	$\neg(x)\neg Gx$	10 SI(S) 113
1,2	(12)	$(x)\neg Gx\ \&\ \neg(x)\neg Gx$	9,11 &I
1	(13)	$\neg\neg(\exists x)(Fx \to Gx)$	2,12 RAA
1	(14)	$(\exists x)(Fx \to Gx)$	13 DN

132 i 133 su sekventi koji su analogni sa 50 i 51, paradoksima materijalne implikacije. Oni mogu biti nazvani *paradoksima formalne implikacije* (termin 'formalna implikacija' skovao je Russell, kako bi opisao univerzalnu kvantifikaciju koja se proteže nad materijalnom implikacijom: t.j. iskaz čiji je oblik '$(x)(Fx \to Gx)$'). 132 nam kazuje o tome da, ako je dato da *sve* ima F, sledi da sve sa G ima F (bez obzira na to šta bi moglo biti svojstvo G). 133 nam kazuje o tome da, ako je dato da ne postoji *ništa* sa F, sledi da sve sa F ima G (bez obzira na to šta bi moglo biti svojstvo G); tako, kada je dato da ne postoji nijedan jednorog, odatle sledi da su svi jednorozi mahnito srećna bića i takođe, sa tim u vezi, da su svi jednorozi neutešno tužni. Ovaj je paradoks, naravno, samo odraz činjenice što koristimo materijalnu implikaciju '$\to$' u našoj analizi univerzalnih iskaza: ako je Fx lažno za svako x, tada, po matrici za '$\to$', $Fx \to Gx$ je istinito za svako x, kakva god da je istinosna vrednost Gx.

Dokaz 134 iziskuje izvesno razmatranje. Kako je to po svojoj prirodi dokaz pomoću RAA, redovi (3)-(9) posvećeni su izvođenju posledica iz (2). Raniji rezultat 3.4.1(d), koji je naveden u redu (3), jeste

$$\neg(\exists x)Fx \vdash (x)\neg Fx.$$

Jednostavan slučaj njegove substitucije, uzimajući 'Fx' kao '$Fx \to Gx$', jeste

$$\neg(\exists x)(Fx \to Gx) \vdash (x)\neg(Fx \to Gx)$$

i ovo je upotrebljeno posredstvom SI da bismo prešli od (2) na (3). (3), elementarnim rasuđivanjem, ima posledicu (8) i (9), od kojih je ovo prvo antecedent (1), a za drugo je pokazano da je u kontradikciji sa (1): zbog toga možemo preći sa (10) na (11) tako što ćemo upotrebiti rezultat 113 uz jednostavnu substituciju 'G' za 'F'.

Do sada razmatrali smo samo substitucije za predikatska slova, ali možemo takođe, kada to zatreba, iziskivati načela koja će

nam dozvoljavati da substituiramo jednu varijablu drugom, ili jedno vlastito ime drugim. Takva načela je lako utvrditi, a nije teško dokazati. Neka A bude wff koja sadrži varijablu v i neka w bude neka varijabla *koja se ne događa u* A. Neka A´ bude rezultat substitucije svih i jedino događanja v u A sa w. Tada, ako je A teorema, onda je to i A´. (Trebalo bi biti očigledno na osnovu pravila formiranja zašto je potrebno da se w ne pojavljuje u A.) Ove se substitucije može proširiti i na sekvente uopšte. Slično tome, neka A bude wff koja sadrži termin t i neka s bude neki termin koji se ne događa u A. Neka A´ bude rezultat substitucija svih i jedino događanja t u A sa s. Tada, ako je A teorema, onda je to i A´. Ovde nema razlike s obzirom na to da li su i t i s oboje vlastita imena, oboje proizvoljna imena, ili je jedno vlastito ime a drugo proizvoljno ime; razlog bi trebalo da je jasan - ako je A teorema, trebalo bi da važi koju god da interpretaciju damo za t, tako da intuitivna razlika između vlastitih i proizvoljnih imena iščezava. Takođe, rezultat se proširuje na sekvente. Oba ova načela prećutno se mogu upotrebiti i u vezi sa TI i SI. Na primer, možemo uzeti dokaz iz 100 takođe kao dokaz za

$$Fa, (y)(Fy \rightarrow Gy) \vdash Ga,$$

pri čemu je ´*m*´ bilo substituirano sa ´*a*´, a ´*x*´ sa ´*y*´.

U ovom odeljku još ostaje da skiciramo pojmove konzistencije i potpunosti za predikatski račun i da tako za predikatski račun učinimo ono što je bilo učinjeno za iskazni račun u Poglavlju 2. U iskaznom računu opisali smo svojstvo sekvent-izraza - ono koje se odnosi na *tautologičnost* - i pokazali smo da su svi i jedino derivabilni sekventi imali to svojstvo, tako prikazujući konzistenciju i kompletnost. U slučaju predikatskog računa, ne pojavljuje se nijedno svojstvo koje može biti opisano u jednostavnom jeziku istinosno-tablične provere; mada na složeniji ali analogan način, može se odrediti svojstvo wffs -svojstvo *biti istinito za sve interpretacije u svakom nepraznom univerzumu*.

Dužni smo takođe i da razjasnimo pojam univerzuma govora. Univerzum je sasvim jednostavno neki skup objekta: on može biti konačan, kao što je to univerzum od tri objekata koji je bio ustanovljen u Pogalvlju 3; on može biti beskonačan, kao što je to univerzum prirodnih brojeva, koji je utvrđen u algebri. *Neprazan* univerzum je onaj univerzum koji sadrži barem jedan

objekat. Predikatski račun pretpostavlja da, bez obzira na interpretaciju, mi razmatramo neprazan univerzum; na primer, kao *teoremu* (iz 131 na osnovu 104) imamo $(\exists x)(Fx \lor \neg Fx)$, mada ovo ne bi bilo istinito u nekom praznom univerzumu zbog toga što je to egzistencijalni iskaz. Zapravo, prazni univerzumi poseduju takva sasvim osobena svojstva da je bolje da ih *ne* razmatramo.

Interpretacija wff u datom nepraznom univerzumu jeste pripisivanje objekata iz univerzuma *terminima* u toj wff, zajedno sa pripisivanjem *svojstava* i *relacija* određenih za objekte u tom univerzumu *predikatskim slovima* u datoj wff (ako su predikatska slova iskazne varijable, jednostavno im pripisujemo istinosne vrednosti, kao u iskaznom računu). Na primer, možemo interpretirati

(6) $Fa \,\&\, (\exists x)Gax$

u univerzumu prirodnih brojeva, pripisujući 2 za '*a*', svojstvo bitu paran za 'F' i relaciju biti veći od za 'G'. U okviru ove interpretacije, (6) tvrdi da je 2 paran i da postoji prirodan broj takav od kojeg je 2 veće; s obzirom na ovu interpretaciju (6) je evidentno istinito. Mi uopšte možemo izračunati istinosnu vrednost neke wff s obzirom na datu interpretaciju u datom univerzumu uz pomoć očiglednih sredstava; uzimamo da se varijable protežu na objekte univerzuma, pa će '$(x)(...x...)$' biti istinito tek u onom slučaju kada svi objekti u univerzumu zadovoljavaju uslov '$(...x...)$', a '$(\exists x)(...x...)$' će biti istinito ako bar jedan objekat u univerzumu zadovoljava uslov '$(...x...)$'. Naposletku, mi upotrebljavamo matrice iskaznog računa da bismo odredili istinosne vrednosti složenih rečenica, dajući istinosnu vrednost njihovih komponenti. Ovo stanovište je izneto u primereno skraćenom obliku, mada bi trebalo da je sasvim dovoljno rečeno da bi se pružila osnova za ideju da su wff *istinite za izvesnu interpretaciju u izvesnom nepraznom univerzumu*.

Sada možemo da kažemo da je wff *logički istinita* ako je istinita za *sve* interpretacije u *svim* nepraznim univerzumima. Kada je reč o računu predikata, ovo je željeno proširenje svojstva biti tautologičan koje važi za wffs iskaznog računa. Ako je dati univerzum konačan, možemo *navesti* zapravo sve moguće interpretacije neke wff; zato što je određeni broj različitih pripisivanja objekata, svojstava i relacija u ovom slučaju konačan.

Zbog toga što je mehanička procedura, za konačne univerzume, koja je analogna proceduri istinosnih tablica, dostupna i za proveravanje istinosti odnosno lažnosti interpretacije. Ali jasno je da nijedna takva tehnika nije dostupna za beskonačne univerzume. Ovde se nalazi temeljna razlika između iskaznog i predikatskog računa.

Za sekvent-izraz uopšte neophodno nam je sledeće. Sekvent-izraz

$$A_1,...,A_n \vdash B$$

je *logički validan* ako za bilo koju interpretaciju u bilo kojem nepraznom univerzumu wffs A_1,..., A_n, B, kada god su A_1,..., A_n sve redom istinite, onda je to i B. Odatle sledi da je sekvent-izraz logički validan ako i samo ako je njegov odgovarajući kondicional logički istinit.

Nije tako teško pokazati da su svi derivabilni sekventi logički validni i da je zbog toga predikatski račun konzistentan. Kao i ranije, ovo iziskuje, slučaj po slučaj, utvrdivanje četrnaest pravila, da bi se pokazalo da nijedna primena bilo kojeg među njima ne vodi iz logički validnog sekventa ka sekventu koji nije logički validan. Da bismo to pokazali u obratnom smeru, daleko je teže. Prvi dokaz kompletnosti za predikatski račun postigao je Kurt Gödel 1930-te. Razmišljanje o ovom dokazu nalazi se i kod Hilberta i Ackermana /7/; zainteresovani student bi trebalo dodatno da konsultuje Churcha /2/, §§44 i 45. Metod dokaza mogao bi na odgovarajući način biti proširen i na ovde iznetu formulaciju predikatskog računa i tako dobijamo rezultat da je bilo koji logički validan sekvent derivabilan iz naših pravila. Ovaj dokaz može biti shvaćen kao granična linija izmedu elementarne i više logike.

Mada se veliki deo ovoga odeljka ugleda na proceduru iz Poglavlja 2, a većina rezultata koji se tiču predikatskog računa predstavljali su proširenje rezultata koji se odnose na iskazni račun, u slučaju kompletnosti ipak postoji značajna razlika. Dokaz potpunosti iz Poglavlja 2, Odeljak 5, takav je da kada je dat tautološki sekvent na osnovu dokaza možemo *konstruisati* derivaciju sekventa o kojem je reč. Ali Gödelov dokaz kompletnosti nema ovaj konstruktivni karakter. Zaista, kao što je to napomenuto u Poglavlju 2, ne postoji nikakav mehanički način, kao što je to provera pomoću istinosnih tablica, razvrstavanja

sekvent-izraza računa predikata u logički validne, odnosno logički invalidne. Ovaj rezultat dugujemo Alonzo Churchu, a za njegovo elementarno razmatranje čitalac bi trebalo da konsultuje Quinea (/17/ §32). Njegovo značenje u praksi se sastoji u tome da kada smo suočeni sa izvesnim sekvent-izrazom i želimo da znamo da li je osnovan ili neosnovan, možemo uz pomoć mašte tragati za dokazom kao što možemo snagom mašte tragati i za interpretacijom u nekom nepraznom univerzumu unutar kojeg će se rasporediti sve asumpcije kao istinite a konkluziju kao lažnu. Dokaz, ukoliko je pronađen, može se mehanički proveriti; interpretacija koja pokazuje neosnovanost, ukoliko je neka takva pronađena, tek ponekad može biti kao takva potvrđena. Ali *pronalaženje* dokaza, kao ni opovrgavajuća interpretacija, ne mogu biti svedeni na pravila.

V e ž b e

1 Za dole navedene sekvente, navedi date substitucije.
 (a) U 101, 'F' substituiraj sa 'F*x* v H*x*', 'G' substituiraj sa 'H*xa*'.
 (b) U 103, 'G' substituiraj sa '(*y*)G*xy*'.
 (c) U 104, 'F' substituiraj sa '(∃*y*)(F*xy* v G*ya*)'
 (d) U 109, 'F' substituiraj sa 'F*x* –> H*x*', 'G' substituiraj sa 'H*x* –> F*x*'.
 (e) U 116, 'F' substituiraj sa '(∃*z*)(F*xz* & G*zx*)'.
 (f) U 119, 'F' substituiraj sa '(*y*)G*yx*', 'P' substituiraj sa '(*z*)G*za*'.
 (g) U 120, 'F' substituiraj sa '(*z*)F*xyz*' u '*x*' i '*y*'.
 (h) U 123, 'F' substituiraj sa 'F*xa* v (*z*)K*zx*', 'G' substituiraj sa '(*z*)F*zx*, 'H' substituiraj sa (*z*)(F*xz* –> G*zy*)' u '*x*' i '*y*'.

2 Koristeći TI i SI tamo gde je to odgovarajuće pokaži validnost sledećih sekvenata:
 (a) (*x*)F*x* & (∃*x*)G*x* ⊢ (∃*x*)(F*x* & G*x*)
 (b) (*x*)F*x* v (∃*x*)G*x* ⊢ (∃*x*)(F*x* v G*x*)
 (c) (∃*x*)F*x* –> (*x*)G*x* ⊢ (*x*)(F*x* –> G*x*)
 (d) (*x*)(F*x* v G*x*) ⊢ (*x*)F*x* v (∃*x*)G*x*
 (e) (*x*)F*x* –> (*x*)G*x* ⊢ (∃*x*)(F*x* –> G*x*)
 (f) (∃*x*)(F*x* –> G*x*) ⊣⊢ (*x*)F*x* –> (∃*x*)G*x*

3 Dokaži sledeće teoreme:
 (a) ⊢ (*y*)((*x*)F*x* –> F*y*)

(b) $\vdash (y)(Fy \rightarrow (\exists x)Fx)$
(c) $\vdash (\exists y)(Fy \rightarrow (x)Fx)$
(d) $\vdash (\exists y)((\exists x)Fx \rightarrow Fy)$

4 (Možda najteža vežba u knjizi)

(a) Međuizvodljivost rezultata 113 sugeriše da egzistencijalni kvantifikator možemo *definisati* terminima univerzalnog kvantifikatora i negacije, na sličan način na koji smo to u Poglavlju 1 definisali '<–>' terminima '–>' i '&'. Prema tome, za bilo koju varijablu v:

$$Df\exists: (\exists v) = \neg(v)\neg.$$ [17]

Na osnovu ove definicije, mi '$(\exists x)$' shvatamo, na primer, naprosto kao skraćenicu za '$\neg(x)\neg$'. Pretpostavimo da prihvatimo ovu definiciju kao i na odgovarajući način preuzeta pravila iz predikatskog računa EI i EE, ostavljajući pri tome sebe samo sa UI i UE prvobitnim pravilima (kao pravila iskaznog računa). Pokaži da se na ovoj osnovi mogu dobiti pravila EI i EE kao *derivirana pravila*. (Napomena: u (jednostavnijem) slučaju EI dovoljno je pokazati da se $A(t) \vdash \neg(v)\neg A(v)$ može uvek dokazati koristeći samo UI i UE, pri čemu su $A(t)$ i $A(v)$ takvi kako je to opisano na kraju Odeljka 1.)

(b) Međuizvodljivost rezultata 144 na sličan način sugeriše moguću definiciju univerzalnog kvantifikatora u terminima egzistencijalnog, pa odatle sledi:

$$Df\mathrm{U}: (v) = \neg(\exists v)\neg.$$

Pokaži obratno, da se, ako prihvatimo ovu definiciju zajedno sa pravilima EI i EE i pravilima iskaznog računa, pravila UI i UE mogu dobiti kao *derivirana pravila*.

3. Identitet

Ono što u ovome poglavlju sada sledi posvećeno je posebnim primenama predikatskog računa. U ovome odeljku ispitujemo jednu posebnu relaciju koja je od velikog značaja za logiku - relaciju identiteta. To je relacija svakako već poznata iz matematike, gde je označena (pomalo zbunjujuće nazvanim) znakom jednakosti '='. Tako se smisao '2 + 2 = 4' sastoji u tome

[17] Zapravo, ovaj postupak je usvojen u mnogim pristupima predikatskom računu.

što broj koji proizilazi iz sabiranja dva i dva jeste (isti kao, ili identičan sa) 4. U matematičkim kontekstima identitet se obično izražava pomoću ´jeste´; ali zbog toga što glagol ´biti´ ima različit smisao, prvo moramo ukazati u *kojem* smislu ´jeste´ izražava identitet. Razmotri šest srpskih rečenica datih dole

(1) Sokrat je filozof.
(2) Pariz je grad.
(3) Hrabrost je vrlina.
(4) Sokrat je filozof koji je proučavao Platona.
(5) Pariz je glavni grad Francuske.
(6) Hrabrost je vrlina koju najviše cenim.

Rečenice (1)-(3) su proste subjekat-predikat rečenice; kaže se da pojedinačni objekat (Sokrat, Pariz, hrabrost) ima izvesno svojstvo (biti filozof, biti grad, biti vrlina). U skladu sa tim mi ´jeste´ iz (1)-(3) nazivamo ´jeste´ *predikacije*. Ova upotreba ´jeste´ mora se staviti naspram ´jeste´ u (4)-(6), u kojima bi smisao pre bio ´jeste isti objekat kao´ (gde je ´objekat´ upotrebljeno u delimično širem neutralnom smislu). Ovo ´jeste´ razlikujemo kao ´jeste´ *identiteta*.

Razlozi zbog kojih se naglašava razlikovanje ´jeste´ identiteta jesu: (a) može li ´jeste´ biti zamenjeno sa ´jeste isti objekat kao´? - ako može, tada ´jeste´ znači identitet, ako ne može, tada ne znači; (b) mogu li fraze koje sadrže ´jeste´ sa obe strane biti međusobno zamenjene, a da pri tome zadržavaju približno isti smisao? - ako mogu, tada ´jeste´ je ´jeste´ koje se tiče identiteta, ako ne mogu, onda nije. U primeni ove dve provere na (1)-(6) trebalo bi imati u vidu razliku između (1)-(3) sa jedne i (4)-(6) sa druge strane. Zaista postoje izvesni tipovi izraza koji obično sadrže ´jeste´ identiteta sa obe strane: prvo, vlastita imena kao što su ´Napoleon´, ´Waterloo´; drugo, ono što gramatičari ponekad nazivaju apstraktne imenice (nasuprot zajedničkim imenicama), koje se odlikuju gubljenjem plurala, kao što su ´hrabrost´, ´hleb´, ´vazduh´; treće, fraze u jednini koje počinju određenim članom ´the´[18] kao što je ´the evening star´, ´the author of Waverley´ takve fraze se obično nazivaju *određeni*

[18] Ili, u srpskom jeziku određenom pokaznom zamenicom. Tamo gde je to neophodno, da bismo ovu razliku naglasili i učinili dovoljno uočljivom, u daljem tekstu zadržaćemo u zagradama originalne termine /prim. prev./.

opisi (definite descriptions); četvrto, ono što možemo zvati pokaznim (demonstrativnim) rečcama i frazama kao što su 'ja', 'on', 'ona knjiga', 'ovaj oblak', 'prethodno veče'. Evo više primera koji se tiču 'jeste' identiteta (ili, u jednom slučaju, upotrebljeno je 'je bila'), a sadrže takve izraze:

(7) Poslednji element (the last element) koji je otkriven jeste uranijum;
(8) Onaj visoki čovek jeste njegov najbliži rođak;
(9) Prethodna noć je bila prva noć (the first night) sajma (of the fair);
(10) Ciceron je Tulije;
(11) Lepo jeste istinito.

Potpunija rasprava o identitetu, sa filozofskog stanovišta, prevazilazi okvir ove knjige. Ovde smo usredsređeni na formalno rukovanje ovim pojmom. U tu svrhu, iz matematike preuzimamo simbol '=' kako bismo predstavili 'jeste' identiteta i u skladu sa tim proširujemo naša pravila formiranja. Neka t i s budu bilo koji termini; tako sada (t = s) sada shvatamo kao atomičku rečenicu. Tako da su '$(a = b)$', '$(c = c)$', '$(m = n)$', '$(a = n)$' sve redom atomičke rečenice u širem smislu. Na osnovu toga, '=' jeste novo predikatsko slovo koje nadzire dva termina; ali, sledeći matematičku praksu, preuzimamo konvenciju njegovog smeštanja *između* dva termina, a ne *ispred* njih; za razliku od drugih predikatskih slova, on ima *utvrđenu* (fixed) interpretaciju. Novi jezik, koji je tek neznatno proširenje starog, jeste *predikatski račun sa identitetom*. U sklopu ostalih pravila formiranja, '=' se može pojaviti u složenim izrazima na isti način na koji se pojavljuju 'F', 'G',... Tako '$(x)(x = x)$', '$(x)(y)((Fx \& (x = y)) \rightarrow Fy)$' jesu wffs proširenog jezika.

Radi rukovanja identitetom u dokazima uvodimo dva jednostavna pravila, pravilo *uvođenja identiteta* (=I) i pravilo *eliminacije identiteta* (=E). Za bilo koji term t, pravilo =I nam dozvoljava da na bilo kojem stupnju u dokaz uvedemo t = t, a koje ne počiva ni na jednoj asumpciji. Ideja bi trebalo da bude jasna: kada je u pitanju logika, svaka stvar je ona sama; stoga je t = t logička istina i zato se može pojaviti bez asumpcija. Neka sada t i s budu termini, a A(t) wff koja sadrži (događanje) t; neka A(s) bude rezultat zamenjivanja barem jednog događanja (ali ne nužno svih) t u A(t) sa s; tada, pošto su date premise t = s i A(t),

pravilo =E nam dozvoljava da izvedemo A(s) kao konkluziju, koja počiva na ulogu onih asumpcija na kojima počivaju premise. I ovde je ideja očita: ako t jeste s, onda kada je dato A(t) - iskaz o t - možemo izvesti A(s) - odgovarajući iskaz o s. Na primer, ako lepo jeste istinito, a lepota se nalazi u oku posmatrača, tada je istina u oku posmatrača (što je argument koji je oblikovan da pokaže kako je Keats bio u zabludi).

Stavljajući u dejstvo ova pravila, imamo:

135 $a = b \vdash b = a$

1	(1)	$a = b$	A
	(2)	$a = a$	=I
1	(3)	$b = a$	1,2 =E

136 $a = b \;\&\; b = c \vdash a = c$

1	(1)	$a = b \;\&\; b = c$	A
1	(2)	$a = b$	1 &E
1	(3)	$b = c$	1 &E
1	(4)	$a = c$	2,3 =E

137 $\mathrm{F}a \dashv\vdash (\exists x)(x = a \;\&\; \mathrm{F}x)$

(a) $\mathrm{F}a \vdash (\exists x)(x = a \;\&\; \mathrm{F}x)$

1	(1)	$\mathrm{F}a$	A
	(2)	$a = a$	=I
1	(3)	$a = a \;\&\; \mathrm{F}a$	1,2 &I
1	(4)	$(\exists x)(x = a \;\&\; \mathrm{F}x)$	3 EI

(b) $(\exists x)(x = a \;\&\; \mathrm{F}x) \vdash \mathrm{F}a$

1	(1)	$(\exists x)(x = a \;\&\; \mathrm{F}x)$	A
2	(2)	$b = a \;\&\; \mathrm{F}b$	A
2	(3)	$b = a$	2 &E
2	(4)	$\mathrm{F}b$	2 &E
2	(5)	$\mathrm{F}a$	3,4 =E
1	(6)	$\mathrm{F}a$	1,2,5 EE

Dokaz 135 može biti zbunjujući: ako shvati (1) '$a = b$' kao premisu t = s, a (2) '$a = a$' kao A(t); tada je (3) '$b = a$' odgovarajuće A(s), zbog toga što proizilazi iz (2) na osnovu zamenjivanja prvog događanja 'a' u (2) sa 'b', u skladu sa identitetom (1). Korak =E u 136 je sličan. Prema 137, iskaz da neki proizvoljno izabrani objekat a ima F jeste međuizvodiv sa iskazom da postoji nešto što jeste a i ima svojstvo F.

Kao teoreme koje sadrže identitet, dobijamo

138 $\vdash (x)(x = x)$

(1)	$a = a$	=I
(2)	$(x)(x = x)$	1 UI

139 $\vdash (x)(y)(x = y \rightarrow y = x)$

140 $\vdash (x)(y)(z)(x = y \,\&\, y = z \rightarrow x = z)$

Ove poslednje mogu se postići dopunjavanjem dokaza iz 135 i 136 koracima CP na koje se nadovezuju koraci UI.

Treba spomenuti i to da ako su, za korak =E, termini dati u pogrešnom poretku (s = t, a ne t = s) možemo dobiti t = s na osnovu SI koristeći 135 (nakon promene u pisanju slova, ako je to neophodno).

Razmotri sada argument (preuzet iz Quinea /17/):

(12) Jedino Smith i stražar na kapiji znaju lozinku; neko ko zna lozinku je ukrao pušku; prema tome, ili je Smith ili je stražar na kapiji ukrao pušku.

On je očigledno osnovan, ali njegova osnovanost se ne može pokazati u računu predikata bez identiteta. Imajući u vidu uobičajeno delovanje reči 'jedino', prva premisa iz (12) znači

(13) Svako ko je znao lozinku ili je bio Smith ili je bio stražar na kapiji.

U (13), 'je bio' ukazuje na identitet. Odatle, koristeći 'Z' za znati lozinku, 'm' za Smith i 'n' za stražar na kapiji, (13) preoblikujemo u

(14) $(x)(Zx \rightarrow x = m \vee x = n)$

Koristeći 'U' za ukrasti pušku, treba da dokažemo sekvent

141 $(x)(Zx \rightarrow x = m \vee x = n), (\exists x)(Zx \,\&\, Ux) \vdash Um \vee Un$

1	(1)	$(x)(Zx \rightarrow x = m \vee x = n)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Zx \,\&\, Ux)$	A
3	(3)	$Za \,\&\, Ua$	A
3	(4)	Za	3 &E
3	(5)	Ua	3 &E
1	(6)	$Za \rightarrow a = m \vee a = n$	1 UE
1,3	(7)	$a = m \vee a = n$	4,6 MPP
8	(8)	$a = m$	A
3,8	(9)	Um	5,8 =E

3,8	(10)	$Um \vee Un$	9 vI
11	(11)	$a = n$	A
3,11	(12)	Un	5,11 =E
3,11	(13)	$Um \vee Un$	12 vI
1,3	(14)	$Um \vee Un$	7,8,10,11,13 vE
1,2	(15)	$Um \vee Un$	2,3,14 EE

Nakon pretpostavljanja tipičnog disjunkta u redu (3) koji odgovara redu (2), dobijamo (7), da ili *a* je *m* ili *a* je *n*. Na osnovu pretpostavljanja jednog ili drugog, sledi da je ili *m* ukrao pušku ili je *n* ukrao pušku. Odatle, na osnovu vE i EE,(redovi (14) i (15)) dobijamo željenu konkluziju.

Ovaj argument ilustruje uvećanu izražajnu moć koju dobijamo dodavanjem identiteta našoj listi logičkih pojmova. U sledećem primeru, razmotri prvo derivabilni sekvent koji sledi:

142 $(\exists x)Fx \vdash (\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$Fa \,\&\, Fa$	2,2 &I
2	(4)	$(\exists y)(Fa \,\&\, Fy)$	3 EI
2	(5)	$(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$	4 EI
1	(6)	$(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$	1,2,5 EE

(Ovaj rezultat može zapravo biti pojačan i kao međuizvodivi rezultat.) Na osnovu validnosti ovog sekventa sledi da ako samo *jedan* objekat ima F onda $(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$; drugim rečima, kada upotrebljavamo različite *varijable* '*x*' i '*y*' *ne* sledi da postoje odgovarajući različiti *objekti*. Da bismo izrazili da postoje barem dva različita objekta sa svojstvom F, neophodan nam je simbol identiteta:

$$(\exists x)(\exists y)((Fx \,\&\, Fy) \,\&\, \neg(x = y))$$

- postoje *x* i *y*, oba sa F, a koji nisu identični[19].

[19] Ovo je veoma značajno ukoliko želimo da pravilno shvatimo našu upotrebu promenljivih. Ako je neko ubio samog sebe, tada je neko ubio nekog; ovo za nas postaje teorema $(\exists x)Uxx \rightarrow (\exists x)(\exists y)Uxy$. Ako želimo da kažemo da je neko ubio nekog *drugog* (a ne sebe), neophodno je da to beležimo kao '$(\exists x)(\exists y)(Uxy \,\&\, \neg(x = y))$', a ovo *neće* slediti iz $(\exists x)(\exists y)Uxy$.

Slično tome, da bismo rekli da postoje barem tri stvari sa F, pišemo

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Fx \,\&\, Fy \,\&\, Fz \,\&\, \neg(x = y) \,\&\, \neg(x = z) \,\&\, \neg(y = z))$.

(Radi jasnoće, ovde sam zanemario stavljanje unutrašnjih zagrada za složenu konjunkciju.) Uopšteno govoreći, za bilo koji broj *n* trebalo bi da je očito kako možemo iskazati da postoji barem *n* stvari koje imaju F, suštinski koristeći pri tome u analizi simbol identiteta.

Ako možemo da prevedemo ´postoji *barem n* stvari sa F´, možemo li možda prevesti i ´postoji tačno *n* stvari sa F´? Počnimo sa ´postoji tačno *jedna* stvar sa F´ ili ´postoji jedna i *samo jedna* stvar sa F´ ili ´postoji barem jedna i u *najboljem slučaju* jedna stvar sa F´. Reći da ´postoji barem jedna stvar sa F´ jeste jednostavno što i reći $(\exists x)Fx$, tako da se problem svodi na prevođenje ´postoji u najboljem slučaju jedna stvar sa F´.

Tvrditi da u u *najboljem slučaju* jedna stvar ima F jeste isto što i tvrditi da bilo koje dve stvari sa F jesu ista stvar. U našem simbolizmu to je

(15) $(x)(y)(Fx \,\&\, Fy \rightarrow x = y)$

- uzmi objekte *x* i *y*, tada ako oba imaju F oni su identični. Ova formula dopušta da ništa nema F, kao i da jedna stvar ima F; ali ako postoji više od jedne, ona postaje evidentno lažna. Prema tome, (15) predstavlja tvrdnju da u *najboljem slučaju* jedna stvar ima F.

Prema tome, reći da *tačno jedna* stvar ima F isto je što i reći

(16) $(\exists x)Fx \,\&\, (x)(y)(Fx \,\&\, Fy \;\; x = y)$.

Sada je (16) zaista međuizvodivo sa kraćim i doličnijim

(17) $(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Fy \rightarrow x = y))$.

(17) tvrdi da nešto ima F i bilo šta što ima F jeste *baš ta stvar*: to je drugi način da se kaže da tačno jedna stvar ima F. I još treći ekvivalent, koji može biti još jasniji, jeste

(18) $(\exists x)(Fx \,\&\, \neg(\exists y)(Fy \,\&\, \neg(x = y)))$

- postoji nešto sa F i *ništa više* nema F.

Prihvatimo sada upotrebu obeležavanja ´$(\exists_1 x)Fx$´ kao skraćenice za, recimo, (17) ((16) ili (18) takođe bi bili odgovarajući):

ovaj novi simbol možemo zvati *numerički određeni kvantifikator* i čitati ga 'postoji tačno jedno *x* sa F', ili 'postoji jedinstveno *x* sa F'.

Ako sada želimo da kažemo da postoje *tačno dve* stvari sa F, na raspolaganju nam je nekoliko pravaca. Možda je najjednostavnije napisati

(19) $(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy \,\&\, \neg(x = y) \,\&\, (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$

- postoje različiti objekti *x* i *y*, oba sa F, takvi da bilo šta što ima F jeste ili jedno, *x*, ili drugo, *y*. Alternativno, možemo upotrebiti već uveden simbol '$(\exists_1 x)$' i pisati

(20) $(\exists x)(Fx \,\&\, (\exists_1 y)(Fy \,\&\, \neg(x = y)))$

- postoji nešto sa F takvo da postoji tačno jedna stvar sa F a koja nije istovetna sa njom: ovo je očigledno ekvivalentno sa tvrdnjom da tačno dve stvari imaju F. Možemo hteti da skratimo (20) upotrebom drugog numerički konačnog kvantifikatora '$(\exists_2 x)Fx$'.

Ovaj se postupak može proširiti na bilo koji konačan broj; to jest, za bilo koji broj *n* možemo pronaći izraz u predikatskom računu sa identitetom koji tvrdi da tačno *n* stvari ima F. Međutim, njegovo razvijanje nećemo ovde nastaviti, ali namesto toga vratićemo se konačno na razmatranje rukovanja određenim opisima u argumentu (frazama u jednini koje u engleskom jeziku počinju sa određenim članom 'the').

U argumentu (12) iz ovoga odeljka pojavio se određeni opis 'stražar na kapiji' (the guard at the gate). Njime smo u našem prevodu rukovali dosledno kao da se radilo o vlastitom imenu kao što je to 'Smith' i upotrebili smo '*n*'. Na tom smo mestu bili u stanju da pomoću ovoga pristupa pokažemo validnost; ali to nije uvek tako. Na primer, razmotri argument (za čiji suštinski oblik smo opet zahvalni Quineu /17/)

(21) Autor Ilijade je napisao Odiseju; prema tome, neko je napisao i Ilijadu i Odiseju.

Ako 'autor Ilijade' (the author of the Iliad) shvatimo kao vlastito ime i predstavimo ga recimo sa '*m*', osnovanost argumenta neće izaći na videlo. Premisa postaje 'Om' a konkluzija '$(\exists x)(Ix \,\&\, Ox)$', pa odgovarajući sekvent nije derivabilan. Očito, osnovanost argumenta se ovde ne zasniva na *svojstvu koje je sadržano pod*

određenim opisom, svojstvu pisanja Ilijade, a upravo ovo bi svojstvo trebalo da se pojavi u našoj analizi premisa ako želimo da pokažemo validnost. Pogled na sadržaj određenog opisa u (21) sugeriše da premisa može biti uzeta tako kao da tvrdi da je *tačno jedna* osoba napisala Ilijadu i da je *ta osoba* napisala Odiseju. Tako premisa postaje

(22) $(\exists x)((Ix \,\&\, Ox) \,\&\, (y)(Iy \rightarrow x = y))$

- neko je napisao Ilijadu i napisao je Odiseju i štaviše, ta je osoba jedinstvena u tome da je napisala Ilijadu; poslednja rečenica izražava njegovu jedinstvenost na način iz (17) koji je dat gore i tako obuhvata i dejstvo određenog opisa. Ali konkluzija iz (22) $(\exists x)(Ix \,\&\, Ox)$ sledi odmah pomoću SI upotrebom 111. (Pogledaj str. 130.)

Postupak sa određenim opisima u (22) od razumljivog je značaja u logičkoj analizi; dugujući ga Russellu, postao je poznat kao Russellova teorija određenih opisa (Russell's theory of definite descriptions). On otvara filozofske probleme koji su, međutim, izvan dosega ove knjige. Ovde bi trebalo imati u vidu, kao što to pokazuje razlika između (12) i (21), da ne postoji ništa što je *obavezujuće* u vezi sa Russellovom analizom: u proveri validnosti, obično je dovoljno dosledno razmotriti određene opise na istoj onoj osnovi na kojoj razmatramo i obična vlastita imena. Grubo rečeno, mogli bismo da kažemo da to kako rukujemo određenim opisima zavisi od toga koliko mnogo nam je potrebno da razgradimo unutrašnje strukture iskaza radi vrednovanja argumenata u kojima se ovi iskazi događaju. A to nam opet kazuje ponešto i o *logičkoj formi* iskaza. Nema ničega što je konačno ili apsolutno u vezi sa našom analizom običnih rečenica u okviru logičke notacije. U svrhu razmatranja validnosti argumenata ista rečenica može u jednom kontekstu rasuđivanja biti predstavljena jednostavno pomoću 'P' (ako se validnost zasniva samo na strukturi iskaznog računa), a u drugom pomoću složene wff predikatskog računa; slično tome i određeni opis unutar rečenice može u jednom kontekstu biti predstavljen jednostavno pomoću '*m*', dok ga je u drugom neophodno analizovati sredstvima Russellove teorije opisa. Možda bismo ovo mogli da izrazimo na taj način što ćemo reći da je logička forma rečenice uvek zavisna od date situacije u kojoj se izvodi argument. Ili bi možda bilo bolje da ne govorimo o logičkoj formi rečenice uopšte, već samo o logičkoj formi argumenata u kojima su upotrebljene rečenice.

V e ž b e

1 Dokaži validnost sledećih sekvenata:

(a) $Fa \dashv\vdash (x)(x = a \rightarrow Fx)$
(b) $\vdash (x)(y)(Fx \& x = y \rightarrow Fy)$
(c) $b = a, c = a \vdash b = c$
(d) $a = b \vdash Fa \leftrightarrow Fb$
(e) $a = b \vdash c = a \leftrightarrow c = b$
(f) $\vdash (\exists x)(x = a)$

2 Dokaži osnovanost sledećih argumenata prevodeći ih u simbolizam predikatskog računa sa identitetom i pokazujući validnost odgovarajućih sekvenata:

(a) Sve ubice su umobolne; Jekyll je ubica; Jekyll je Hyde; prema tome, Hyde je umobolan.
(b) Nijedan ubica nije zdrav; Jekyll je ubica; Hyde je zdrav; prema tome, Jekyll nije Hyde.
(c) Jedino Tom i Jane plešu; Tom i Jane oboje igraju twist; prema tome, svako ko pleše igra twist.
(d) Postoji u najmanju ruku jedan živi šef države; Mao Tse-tung je živi šef države; Johnson nije Mao Tse-tung; prema tome, Johnson nije živi šef države.

3 Utvrdi sledeći međuizvodivi rezultat (uporedi (16) i (17) iz ovoga teksta):

(a) $(\exists x)(Fx \& (y)(Fy \rightarrow x = y)) \dashv\vdash (\exists x)Fx \& (x)(y)(Fx \& Fy \rightarrow x = y)$

(Napomena: SI, koristeći (c) iz Vežbe 1, može skratiti izradu.)

4 Napiši izraz predikatskog računa sa identitetom koji ima sledeće značenje:

(a) postoje najviše dve stvari sa F;
(b) postoje tačno tri stvari sa F.

5 Koristeći Russellovu teoriju određenih opisa, utvrdi osnovanost sledećeg argumenta:

(a) Autor *Mein Kampfa* je umro 1945; Hitler je napisao *Mein Kampf*, prema tome, Hitler je umro 1945.

4. Silogizam

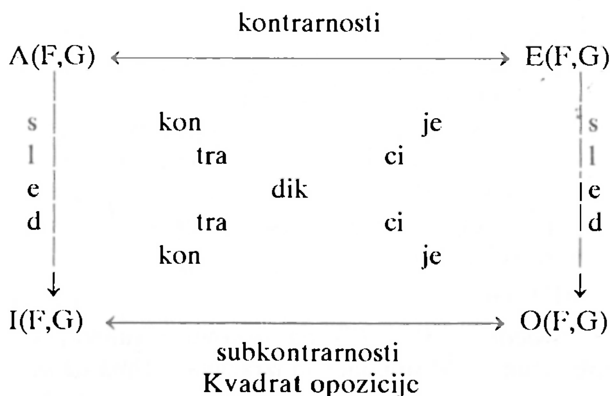
Predikatski račun je bio neotkriven do pre 100 godina. Svoj razvoj duguje logičarima koji su delovali s kraja prošlog, odnosno početka ovog stoleća, posebno Gotlobu Fregeu i Russellu. U toku gotovo preko 2000 godina pre toga, nekim od tih istih logičkih materijala bavilo se u okviru teorije silogizma, koju dugujemo Aristotelu; u toku ovoga perioda nije joj dodato ništa što bi bilo posebno značajno. Danas ne može biti sumnje oko toga da je predikatski račun zamenio silogizam kao instrument ozbiljnog logičkog rada; predikatski račun je u odnosu na silogizam isto što je i oštro oruđe u odnosu na tupi nož. (Bezmalo, kada god se uvodi neki novi komad opreme nađe se i onih koji su pre za zastarelu mašineriju sa kojom su se srodili; a nesumnjivo je i to da je predikatskim računom teže ovladati.) Osim istorijskih nema drugih razloga za proučavanje silogizma; ali ova je teorija bila značajna tokom istorije kako logike tako i filozofije, pa možda tu leži razlog zbog kojeg zaslužuje mesto u savremenom kursu logike. Naša će obrada biti kratka, samim tim što se ovaj materijal može pronaći u drugim delima (na primer, Joseph /8/ ili Stebbing /22/[20]); ali pokušaću takođe da objasnim odnos između silogizma i predikatskog računa, a koji je sporan (vidi Strawson /23/).

Teorija silogizma proučava samo četiri tipa iskaza, koje smo razmatrali u Poglavlju 3, Odeljak 1: (i) Sve sa F ima G, $(x)(Fx \to Gx)$, koji zovemo *univerzalno-afirmativni* i simbolizujemo sa A(F,G); (ii) ništa sa F nema G, $(x)(Fx \to \neg Gx)$, koji zovemo *univerzalno-negativni* i simbolizujemo sa E(F,G); (iii) nešto sa F ima G, $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$, koji zovemo *partikularno-afirmativni* i simbolizujemo ga sa I(F,G); (iv) nešto sa F nema G, $(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$, koji zovemo *partikularno-negativni* i simbolizujemo sa O(F,G). U silogizmu, za razliku od predikatskog računa, ne analizujemo dalje strukturu ovih iskaza; izdvajamo samo dva svojstva koja su u njemu sadržana, a ostalo beležimo jednim od simbola ´A´, ´E´, ´I´, ´O´. Uobičajeno je, što sa našeg stanovišta nije najsrećnije rešenje, zvati slova ´F´, ´G´,... *terminima*; u ovom ću odeljku

[20] Čitaocu je nešto širi pregled ovoga sadržaja dostupan i na srpskom, u okviru Priorove *Historije logike*, Naprijed, Zagreb, 1970, kao i u Prvom delu Koena i Nagela *Uvod u logiku i naučni metod*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd (više izdanja).

slediti tu praksu nadajuci se da uključivanje ove dvosmislenosti neće izazvati nesporazum.

Osnovne logičke relacije između četiri forme tradicionalno su izložene dijagramom, nazvanim *kvadrat opozicije* (slika I). Značenje terminologije u kvadratu suprotnosti dato je, barem na nivou iskaznog računa, u Poglavlju 2, Odeljak 3. U sklopu tamo izloženog razmatranja tvrdnje[21] iz ovoga dijagrama možemo uteloviti u dijagram



Kvadrat opozicije

koji sadrži sledećih šest načela:

(1)	¬(A(F,G) <–> O(F,G))	(A i O su kontradikcije);
(2)	¬(I(F,G) <–> E(F,G))	(I i E su kontradikcije);
(3)	¬(A(F,G) & E(F,G))	(A i E su kontrarnosti);
(4)	I(F,G) v O(F,G)	(I i O su subkontrarnosti);
(5)	A(F,G) –> I(F,G)	(A implicira I);
(6)	E(F,G) –> O(F,G)	(E implicira O).

Ova načela nisu međusobno nezavisna. Na primer, ako je dato (1) i (2), *samo na osnovu iskaznog računa* možemo dedukovati (4) i iz (3) ili (3) iz (4) i (5) iz (6) ili (6) iz (5) - ovo ostavljamo kao zanimljivu vežbu.

Tradicionalno stanovište je takvo da A i O moraju imati suprotne istinosne vrednosti u svim okolnostima, a to moraju imati i I i E ((1) i (2)). A i E ne mogu oba biti istinita, ali mogu biti oba lažna; oba će zaista biti lažna u slučaju kada su I i O oba lažna; obratno, I i O mogu oba biti istinita i to će biti u slučaju kada su

21 Vidi još i stranice 181 i 182.

A i E oba lažna, ali ne mogu i jedni i drugi biti lažni ((3) i (4)). Kada god je A istinito, tada je i I, kada god je E istinito, tada je i O ((5) i (6)). Razmatranje jednostavnih primera podupreće ovo učenje.

U kvadratu opozicije poredak u kojem su dati termini 'F' i 'G' utvrđen je kao sasvim fiksiran. Međutim, postoje tradicionalna načela, poznata kao *zakoni konverzije*, koja se odnose na međuzamenljivost poretka termina. U stvari, imamo

(7) I(F,G) –> I(G,F) (8) E(F,G) –> E(G,F).

Konverzije u (7) i (8) slede iz (7) i (8) na osnovu promene 'F' i 'G', tako što će oba kondicionala odjednom moći da budu pojačana bikondicionalima. (7) je poznato kao zakon *proste konverzije* I, a (8) kao zakon *proste konverzije* E. Konverzija je prosta zbog toga što se I-forma konvertuje u I-formu, a E-forma u E-formu. Takva načela ne postoje za A- i O-forme; zato što očito nemamo niti A(F,G) –> A(G,F), niti O(F,G) –> O(G,F). Međutim, za A imamo

(9) A(F,G) –> I(G,F).

((9) je posledica (5) i (7) na osnovu rasuđivanja pomoću iskaznog računa.) (9) se ponekad izražava rečima da se A-forma *konvertuje per accidens* u I-formu i zove se zakon *konverzija per accidens* za A. Konverzija od (9) se ne može postići, niti uopšte postoji takvo načelo za O-formu. Zato se kaže da se I, E i A konvertuju, dok se za O kaže da se ne konvertuje.

Ostali tradicionalni zakoni, kao što su načela *obverzije*, zavise od uvođenja negativnih termina '¬F', '¬G', etc. Takvi termini nisu neophodni za aristotelovsku teoriju silogizma, tako da ćemo ih ovde izostaviti. Zainteresovani čitalac bi trebalo da konsultuje Josepha /8/ i Stebbingovu /22/.

Za razliku od do sada izloženih načela, silogizam je usredsređen na *tri* termina, nazovimo ih 'F', 'G' i 'H'. Da bismo dosledno odredili silogizam, neka tri data termina budu P_1, P_2 i P_3 i nazovimo P_1 *minor termin*, P_2 *srednji termin*, a P_3 *major termin*. Tada je silogizam sled tri iskaza (od kojih se prva dva zovu *premise* a poslednji *konkluzija*) od kojih svaka ima ili A-, ili E-, ili I-, ili O-formu, tako da u tom poretku konkluzija sadrži minor i major termin, prva premisa sadrži major i srednji termin, a druga premisa sadrži minor i srednji termin. Prva premisa, zato što sadrži major termin, jeste *major* premisa, a druga premisa,

zato što sadrži minor termin, jeste *minor* premisa. Srednji termin se pojavljuje u obe premise ali ne u konkluziji. Na primer,

(10) A (F,H)
I (H,G)
———
O (G,F)

može se shvatiti kao silogizam zato što sadrži tri termina 'F', 'G' i 'H', tako da od dva koja se pojavljuju u konkluziji prvi se pojavljuje samo u drugoj premisi, a drugi samo u prvoj premisi (u ovom slučaju, 'F' shvatamo kao major termin zato što se pojavljuje u prvoj premisi, a 'G' kao minor termin zato što se pojavljuje u drugoj premisi), dok se treći termin pojavljuje u dve premise ali ne u konkluziji (pošto je ovde 'H' srednji termin). Možemo stoga P_1 uzeti kao 'G', P_2 kao 'H', a P_3 kao 'F' i tada je odredenje zadovoljeno. Ovaj primer, sticajem, odreduje i konvenciju za pisanje silogizma.

Razmotri sada

(11) A (H,F)
I (F,G)
———
O (G,H)

I on takođe može biti shvaćen kao silogizam, u kojem je 'F' srednji termin, 'G' je minor termin, a 'H' je major termin. On je zapravo neposredno u vezi sa (10), na osnovu toga što je dobijen iz (10) samo zamenjivanjem 'F' i 'H'. U tradicionalnim shvatanjima silogizma postoji nejasnoća kada se radi o tome da li (11) svrstati pod isti silogizam kao (10) ili ne. Na ovom mestu, prihvatićemo ih kao različite silogizme, ali koji predstavljaju *isti obrazac*.

Zbog toga što stoji neograničeno mnogo termina postoji i neograničeno mnogo različitih silogizama; ali postoji samo konačno mnogo različitih *obrazaca* (figura). Da bismo ovo uvideli, složićemo se oko toga da ako slova koja se nalaze u konkluziji ustanovimo 'F' i 'H', pri čemu ćemo zadržati ovaj njihov redosled, a 'G' ćemo koristiti za treći termin: tako je 'F' tada minor termin, 'G' srednji termin, a 'H' major termin. Pošto je po definiciji poredak termina u konkluziji ustanovljen, postoje samo četiri moguća načina razmeštanja dva termina u okviru dve premise, kao što pokazuje sledeći dijagram:

	I	II	III	IV
Major premisa:	..(G,H)	..(H,G)	..(G,H)	..(H,G)
Minor premisa:	..(F,G)	..(F,G)	..(G,F)	..(G,F)
Konkluzija:	..(F,H)	..(F,H)	..(F,H)	..(F,H)

Ova četiri oblika su četiri *figure* silogizma. U figuri I postoje četiri moguće major premise (A, E, I i O), četiri moguće minor premise i četiri moguće konkluzije. Prema tome, postoji 4 x 4 x 4 = 64 moguća silogizma. Ista računica važi i za preostale tri figure, tako da sve u svemu imamo 4 x 64 = 256 mogućih silogizama, za ovde utvrđena slova ´F´, ´G´ i ´H´. Na osnovu jednog od ovih 256 može se dobiti *bilo koji* silogizam putem promene slova: tako i (10) i (11) predstavljaju promene slova silogizma u Figuri IV (ovo je najlakše videti razmatranjem položaja srednjeg termina). Odatle sledi da postoji tačno 256 različitih obrazaca silogizma. 256 stvarnih silogizama dobijenih ustanovljavanjem ´F´, ´G´ i ´H´ na prethodni način možemo zvati *standardnim slučajevima* ovih obrazaca.

Za ovu računicu suštinsko je naravno to da poredak termina u konkluziji bude ustanovljen definicijom. Na primer,

(12) A (F,H)
I (H,G)
―――――
O (F,G)

koje dobijamo iz (10), menjanjem *poretka* ´F´ i ´G´ u konkluziji, *nije* silogizam zato što se *drugi* termin ´G´ u konkluziji ne pojavljuje u *prvoj* premisi. Međutim, ako takođe promenimo i *poredak premisa*, da bismo dobili

(13) I (H,G)
A (F,H)
―――――
O (F,G)

rezultat koji jeste silogizam (´H´ je još uvek srednji termin, ´F´ je sada minor, a ´G´ major termin): ali, dok je (10) odgovaralo obrascu Figure IV, (13) odgovara obrascu Figure I. Tako se stara rasprava, čiji se tragovi zatiču i u sasvim skorim knjigama o tradicionalnoj logici, oko toga da li postoji tri ili četiri različite figure, može razaznati kao posledica nesigurnosti u definiciji silogizma.

Osnovni predmet tradicionalne logike jeste da se među 256 mogućih obrazaca napravi razlika između onih koji su *validni* i

onih koji *invalidni*. Načinjena su dva sasvim različita pristupa koja vode istom ishodištu. Jedan je metod taj da se utvrde sasvim opšta načela na osnovu kojih svaki od obrazaca redom može biti proveren. Takvo jedno načelo jeste da nijedna konkluzija ne sledi iz dve (univerzalne ili partikularne) negativne premise. Samo ovo načelo pokazuje da nije validno 16 obrazaca u svakoj figuri, ili ukupno 64. Ova načela nećemo ovde iznositi, ali se ona mogu naći u Vežbi na kraju ovoga odeljka. Drugi metod, koji pripada Aristotelu, sastoji se u tome da se prihvati kao validna izvesna 'samoevidentnost' obrazaca u prvoj figuri, a zatim, koristeći takva načela kao što su (1)-(9), da se *dedukuju* validni obrasci preostalih figura. Ovaj je metod tradicionalno poznat kao redukcija (*svođenje*) *na prvu figuru* i smatra se da se mogu razlikovati dve njegove forme, direktna i indirektna redukcija. Grubo govoreći, u indirektnoj redukciji, validni obrazac je deriviran uz pomoć RAA - kontradikcija je derivirana iz pretpostavke da obrazac *ne* stoji pouzdano, dok u direktnoj redukciji to nije tako. Redukcija je od velikog istorijskog značaja, pošto je možda najraniji znani pokušaj da se konkluzije deriviraju sistematski iz datih asumpcija. Mada je Aristotelovo predstavljanje grubo i neobavezno s obzirom na savremene standarde strogosti, moguće je slediti osnovne crte njegovog programa i derivirati validne silogizme kao konkluzije, isključivo na osnovu rasudivanja putem iskaznog računa, iz vrlo malog skupa silogističkih asumpcija. Validno razumevanje takvog postupka uopšte može se pronaći kod Łukasiewicza /12/.

Zapravo, proizilazi da postoje samo 24 validna obrasca silogizma, 6 u svakoj figuri. Međutim, pre nego što ih predstavim tabelom, želeo bih da dovedem u vezu teoriju silogizma sa predikatskim računom.

Prirodno pitanje koje stoji na početku jeste: ako prevedemo načela (1)-(9) u notaciju predikatskog računa, koristeći prevode na koje je ukazano na početku ovoga odeljka u kojem su uvedene četiri tradicionalne forme, da li su ti rezultati teoreme predikatskog računa ili nisu? Odgovor na to jeste da neki jesu, a neki nisu; da bi se videlo zašto nisu, najbolje će biti da se počne sa (4), koje prevodimo u

(14) $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vee (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$.

Ovo nije teorema predikatskog računa; niti bismo želeli da to bude; zbog toga je lako dokazati sledeći rezultat:

143 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vee (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx) \dashv\vdash (\exists x)Fx$,

koji pokazuje da je (14) međuizvodivo sa prostom tvrdnjom da nešto ima F[22]. Zbog toga što ako bi (14) bilo teorema, ono bi bilo teorema o tome da nešto ima F, za svako svojstvo F, što je očigledno apsurdno. Prihvatajući (4) kao načelo logike, tradicionalna teorija predvida mogućnost da *može biti da ništa* nema F. I(F,G) i O(F,G) nisu dosledno subkontrarni, kao što tradicionalna logika drži, pošto će oba biti lažna u slučaju da ne postoji ništa sa F. (Nije tačno ni da su neki jednorozi debeli, niti da neki jednorozi nisu debeli.)

Nazovimo termin 'F' *praznim* ako ne postoji ništa sa F (t.j. $\neg(\exists x)Fx$). *Tradicionalna logika u ovom smislu utvrđuje kao asumpciju da nijedan termin nije prazan.* Gledano u celini, zbog toga možemo u predikatskom računu postići rezultate teorije silogizma jedino na izvesnim *egzistencijalnim asumpcijama*. Tako dobijamo (4) u obliku (14) na asumpciji $(\exists x)Fx$, kao što to pokazuje 143. S obzirom na (1) i (2), možemo dokazati

144 $\vdash \neg((x)(Fx \rightarrow Gx) \leftrightarrow (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx))$
145 $\vdash \neg((x)(Fx \rightarrow \neg Gx) \leftrightarrow (\exists x)(Fx \,\&\, Gx))$

- ovde nije neophodna nijedna egzistencijalna asumpcija. Međutim, za (3) najstrožiji rezultat koji se može postići jeste

146 $(\exists x)Fx \vdash \neg((x)(Fx \rightarrow Gx) \,\&\, (x)(Fx \rightarrow \neg Gx))$.

Nije teško zapaziti zašto je neophodna egzistencijalna asumpcija. Ako ništa nema F, tada će na osnovu sekventa 133 i $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ i $(x)(Fx \rightarrow \neg Gx)$ biti istiniti (146 se zapravo može pojačati do međuizvodivosti). Slično, za (5) i (6) u najboljem slučaju dobijamo

147 $(\exists x)Fx \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$
148 $(\exists x)Fx \vdash (x)(Fx \rightarrow \neg Gx) \rightarrow (\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$

zbog toga ako ništa nema F, biće istinito da $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ i da $(x)(Fx \rightarrow \neg Gx)$ na osnovu 133, kao i evidentno lažno da $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$ i da $(\exists x)(Fx \,\&\, \neg Gx)$. (7) i (8) postaju teoreme bez egzistencijalnih asumpcija, dok (9) opet iziskuje da bude pretpostavljeno $(\exists x)Fx$.

---

[22] Za dokaz, usporedi dokaz sličnog sekventa 45 (Iskazni račun) poglavlje 2, odjeljak 2.

Kvadrat opozicije može se obrazovati za predikatski račun, u kojem važe tradicionalne relacije, tako što će se umesto A-, E-, I- i O-formi koristiti jednostavne kvantifikator-forme ´(*x*)F*x*´, ´(*x*)¬F*x*´, ´(∃*x*)F*x*´, ´(∃*x*)¬F*x*´. Zato možemo redom dokazati kao teoreme

149 ⊢ ¬((*x*)F*x* <–> (∃*x*)¬F*x*)
150 ⊢ ¬((*x*)¬F*x* <–> (∃*x*)F*x*)
151 ⊢ ¬((*x*)F*x* & (*x*)¬F*x*)
152 ⊢ (∃*x*)F*x* v (∃*x*)¬F*x*
153 ⊢ (*x*)F*x* –> (∃*x*)F*x*
154 ⊢ (*x*)¬F*x* –> (∃*x*)¬F*x*

(dokazi su elementarni). 152 trebalo bi uporediti sa (14), koji je odgovarajući tradicionalni rezultat. 152, za razliku od (14), ne povlači da nešto ima F, ali povlači da *postoji nešto*. Da nešto ili ima F ili nema; odatle 152. Tako 152 jasno iznosi na videlo zavisnost predikatskog računa od interpretacije u okviru *nepraznih univerzuma govora*. Ako nema uopšte ničega, 152 će biti lažno. Ali teorija silogizma pravi daleko više iznenađujuću asumpciju da je bilo koji (svaki) *termin* neprazan, da svako svojstvo ima slučajeve.

Da bismo sada prikazali validne obrasce silogizma, usvajamo pogodnu skraćenicu gde god da se pojavljuje samo figura i tip iskaza. Tako ´I EIO´ ukazuje na onaj obrazac u Figuri I u kojem je major, minor premisa E, manja I, a konkluzija O. Standardan slučaj ovoga obrasca je, prema tome,

(15) E (G,H)
I (F,G)
———
O (F,H)

Kao sekvent računa predikata koji je odgovarajući silogizmu shvatamo sekvent u kojem se dve (prevedene) premise silogizma pojavljuju kao asumpcije i gde se kao konkluzija silogizma pojavljuje (prevedena) konkluzija. Tako za (15) odgovarajući sekvent jeste

(*x*)(G*x* –> ¬H*x*), (∃*x*)(F*x* & G*x*) ⊢ (∃*x*)(F*x* & ¬H*x*).

Sledeća tabela pruža 24 validna silogistička obrasca koji su raspoređeni prema odgovarajućoj figuri: u derivaciji sekvenata koji

odgovaraju standardnim slučajevima ovih obrazaca neophodne su nam egzistencijalne asumpcije u devet slučajeva, kao što je to pokazano u tabeli:

I AAA	II EAE	# III AAI	+ IV AAI
I AII	II AEE	III AII	IV AEE
I EAE	II AOO	III IAI	# IV EAO
I EIO	II EIO	# III EAO	IV EIO
* I AAI	* II EAO	III EIO	IV IAI
* I EAO	* II AEO	III OAO	* IV AEO

* : iziskuje kao dodatnu asumpciju (∃*x*)F*x*
\# : " " " " (∃*x*)G*x*
\+ : " " " " (∃*x*)H*x*.

Pažljivi čitalac koji je uradio sve ranije vežbe već je pokazao validnost 13 od odgovarajućih sekvenata (102, 3.3.2(a)-(d), 106, 3.3.2(a)-(g)). Tih 13 se sada može poistovetiti sa 13 iz gornje tabele. Egzistencijalne asumpcije su neophodne tačno za onih devet validnih obrazaca silogizma u kojima je partikularna konkluzija izvedena iz dve univerzalne premise, a nije teško razabrati zašto. Zbog toga što ako su sva tri termina silogizma prazna univerzalne premise će biti istinite na osnovu 133, dok će njihove konkluzije biti lažne. Medutim, nikada nam nije neophodno više od jedne egzistencijalne asumpcije da bismo pokazali validnost. Na primer, u slučaju IV AAI u predikatskom računu možemo derivirati

155 (∃*x*)H*x*, (*x*)(H*x* —> G*x*), (*x*)(G*x* —> F*x*) ⊢ (∃*x*)(F*x* & H*x*),

zato što iz (∃*x*)H*x* i (*x*)(H*x* —> G*x*) sledi da (∃*x*)G*x*, a iz (∃*x*)G*x* i (*x*)(G*x* —> F*x*) sledi da (∃*x*)F*x*, na osnovu 105.

Na osnovu ovih rezultata izlazi na videlo odnos između tradicionalnog učenja o silogizmu i predikatskog računa. Načela kvadrata opozicije, zakon konverzije i 24 validna silogizma, svi su derivabilni kao teoreme ili sekventi predikatskog računa. S tom ogradom što je u nekim slučajevima neophodno sačiniti posebne egzistencijalne asumpcije. Ovo se može shvatiti kao situacija u kojoj predikatski račun pomaže da se eksplicitno pruže osnove na kojima je zasnovana teorija silogizma, pre nego kao znak neke temeljne diskrepancije između ovo dvoje. Tradicionalna je teorija, zapravo, onaj *fragment predikatskog računa*

u kojem su četiri forme iskaza izabrane kao predmet posebnog izučavanja, pri čemu je pretpostavljeno da termini koji se u ovim formama pojavljuju nisu prazni. Predikatski je račun obuhvatnije izučavanje, barem s obzirom na to da on ne zanemaruje prazne termine; u prethodnom odeljku videli smo kako nam on omogućuje da baratamo argumentima u kojima se pojavljuju iskazi koji nisu ni u jednoj od četiri tradicionalne forme; a u sledećem odeljku videćemo kako nam on takođe omogućuje da se na formalan način bavimo svojstvima relacija koje leže van dosega teorije silogizma.

V e ž b e

Nazovimo prvi termin nekog A, E, I, ili O iskaza njegovim *subjektom*, a drugi njegovim *predikatom*. Saglasimo se takođe oko toga da zovemo predikate negativnih iskaza i subjekte univerzalnih iskaza distribuiranim (*razdeljenim*), dok će predikati afirmativnih i subjekti singularnih iskaza biti *nedistribuirani*. Koristeći ´*r*´ za ´biti distribuiran´, a ´*n*´ za ´biti nedistribuiran´, ovi naši dogovori pokazani su na sledećoj tabeli:

A (F,G)	E (F,G)
r n	*r r*
I (F,G)	O (F,G)
n n	*n r*

Opšta načela silogizma mogu se sada ustanoviti na sledeći način:

A *Pravilo kvantiteta*

1 Nijedan termin nije distribuiran u konkluziji validnog silogizma, sem ako nije distribuiran u odgovarajućoj premisi.

2 Srednji termin validnog silogizma distribuiran je barem jednom[23].

B *Pravilo kvaliteta*

1 Konkluzija validnog silogizma je negativna ako i samo ako je jedna od njegovih premisa negativna.

2 Ne postoji validan silogizam sa dve negativne premise.

[23] Prekršiti ovo pravilo jeste što i učiniti ono što se ponekad zove greška nedistribuiran srednjeg termina.

Pokaži neformalno iz ovih pravila:

(a) da nijedan validan silogizam ne sadrži dve partikularne premise (Uputstvo: jedine moguće kombinacije su II, IO, OI i OO, od kojih poslednja narušava B2, a prva, na osnovu tabele distribucije, narušava A2. U preostala dva slučaja, na osnovu B1, konkluzija mora biti O ili E, ako silogizam treba da bude validan, u kojima je u oba slučaja predikat distribuiran, pa je zato na osnovu A1 distribuiran takođe i u major premisi: sledi kontradikcija);

(b) da nijedan validan silogizam sa partikularnom premisom nema univerzalnu konkluziju (Uputstvo: kada bi konkluzija bila A bilo bi neophodno da i minor i srednji termini budu distribuirani u premisama, na osnovu A1 i A2; kada bi konkluzija bila E, bilo bi neophodno da i minor i major termini budu distribuirani u premisama, na osnovu A1 i A2; upotrebi B1 i B2 da bi pokazao da nema dozvoljene kombinacije premisa koja ovo omogućuje);

(c) da od 256 mogućih obrazaca silogizma B2 isključuje 64 kao validne, kao rezultat iz (a) jeste isključivanje dodatnih 48, pravilo B1 isključuje daljih 72, a kao rezultat (b) je isključivanje još 24 (tako je već pokazano da ukupno 208 obrazaca nije validno);

(d) da validan silogizam u Figuri I mora imati afirmativnu minor premisu i univerzalnu major premisu;

(e) da validan silogizam u Figuri II mora imati jednu negativnu premisu a major premisa mora biti univerzalna;

(f) da validan silogizam u Figuri III mora imati partikularanu konkluziju, ako je konkluzija negativna, tada je to i major premisa.

(S obzirom na (d)-(f), od 48 obrazaca koji preostaju za razmatranje nakon (c), pokazano je da je 18 validno u Figurama I-III a pokazano je i da 18 nije validno: od preostalih 12, za 6 se može pokazati da je validno u Figuri IV, a da preostalih 6 nije validno na osnovu razmatranja svakog od slučajeva - nema jedinstvenih pravila za Figuru IV.)

5 Svojstva relacija

Ako izaberemo rečenicu i iz nje izostavimo vlastito ime (a proper name), dobijamo predikat; ovaj predikat, kažemo, izražava svojstvo. Na primer, ako izostavimo vlastitu imenicu

'kiseonik' iz 'kiseonik je element', dobijamo predikat '... je element' koji izražava svojstvo biti element. Ili ako izostavimo 'Marija' iz rečenice 'svako voli Mariju', dobijamo predikat 'svako voli ...' što izražava svojstvo biti voljen od svakog. U predikatskom računu predikati postaju iskazne funkcije date u jednoj varijabli: biti element, može se izraziti pomoću 'Ex' za 'x'; biti voljen od svakoga, pomoću '(y)Lyx' za 'x'.

Ako izostavimo dva ili više vlastitih imena iz rečenice dobijamo *(dijadički ili polijadički) relacioni izraz*, za koji kažemo da izražava relaciju. Na primer, ako izostavimo 'Brut' i 'Cezar' iz 'Brut je ubio Cezara', dobijamo dijadički relacioni izraz '... je ubio ...', koji izražava izvesnu relaciju. U predikatskom računu relacioni izrazi postaju izvesne funkcije za dve ili više varijabli: relacija ubijanja se može izraziti pomoću 'Uxy' za 'x' i 'y'.

Iskazne se funkcije mogu, za bilo koji broj varijabli, preobraziti u wffs koje izražavaju *iskaze* na dva osnovna načina, a koja se mogu kombinovati: varijable u njima možemo zameniti pomoću termina, ili možemo ispred staviti kvantifikatore. Tako iz 'Uxy' dobijamo wff '(x)Uxm' kombinujući ove pristupe.

Neću određivati ni svojstva ni relacije. Pretpostavlja se da će ovi pojmovi biti shvaćeni na osnovu primera. Postupak objašnjenja trebalo bi da se negde zaustavi (mada ne bi *zapravo* trebalo da se zaustavi ovde). U preostalom delu ovoga odeljka slediću uobičajenu logičku praksu koristeći za relacije 'R' umesto 'F'. 'R' se ubraja naravno u predikatsko slovo, zajedno sa 'F', 'G', 'H',...; ali ono će biti od pomoći da se naglasi da ono čime se bavimo jesu relacije. Samo će *dijadičke* relacije (izražene iskaznim funkcijama sa dve varijable) biti razmatrane.

Mi ćemo ustvari odrediti različita značajna svojstva koja relacije mogu imati, a potom ćemo ispitati veze između ovih svojstava. Prvo, kaže se da je relacija R *simetrična* ako za bilo koje x i y, ako R važi između x i y, onda R važi između y i x: simbolički, R je simetrična ako i samo ako

(1) $(x)(y)(Rxy \rightarrow Ryx)$.

Relacija biti istih godina kao i, jeste simetrična; zbog toga što ako je *a* istih godina kao i *b*, tada je *b* istih godina kao i *a*, za proizvoljno *a* i *b*. Relacija biti ili brat ili sestra od, jeste simetrična; zbog toga što ako je *a* ili brat ili sestra od *b*, tada je *b*

ili brat ili sestra od *a*. S druge strane, biti brat od, *nije* simetrična; zbog toga što princ Charles jeste brat princeze Anne, ali princeza Anne nije brat princa Charlesa. Uopšteno govoreći, da bi se pokazalo da relacija R nije simetrična neophodno je da objekti *m* i *n* budu utvrđeni tako da istovremeno važi i R*mn* i ¬R*nm*. Zbog toga što je negacija od (1) ekvivalentna (međuizvodiva) sa

(2) $(\exists x)(\exists y)(Rxy \& \neg Ryx)$.

Relacija biti stavljen do, jeste simetrična, mada to nije i relacija biti stavljen sa desne strane. S obzirom na Teoremu 139, relacija identiteta = jeste simetrična; (1) zapravo postaje 139, ako se ´R´ shvati kao ´=´.

Drugo, relacija je *asimetrična* ako, za svako *x* i *y*, ako R važi između *x* i *y* onda R *ne* važi između *y* i *x*; simbolički, R je asimetrična ako i samo ako

(3) $(x)(y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$.

Relacija biti otac od, jeste asimetrična, zbog toga što ako je *a* otac od *b*, *b* nije otac od *a*. Numerička relacija biti manji od, jeste asimetrična, zato što ako je *a* manje od *b*, tada *b* nije manje od *a*. Koristeći ´<´ da bismo izrazili ovu relaciju kao matematičku istinu imamo to da $(x)(y)(x<y \rightarrow \neg y<x)$, što zadovoljava (3) za ´R´ kao ´<´.

Voleti, čini se da nije asimetrična relacija. Zbog toga što je Antonije voleo Kleopatru, tada je takođe Kleopatra volela Antonija. Uopšteno govoreći, da bismo pokazali da R nije asimetrično, neophodno je da *m* i *n* budu utvrđeni tako da važi i R*mn* i R*nm*. Zbog toga negacija od (3) postaje

(4) $(\exists x)(\exists y)(Rxy \& Ryx)$.

Matematička relacija biti manji od ili jednak sa (simbolički ´∃´) nije asimetrična. Zbog toga što $2 \leq 2$ kao i $2 < 2$; prema tome $(\exists x)(\exists y)(x < y \& y < x)$ - ovo sledi na osnovu dva koraka EI. (3) i (4) ne iziskuje da *x* i *y* budu različiti objekti. Možemo reći da je relacija R *antisimetrična* ako, za bilo koje *različito x* i *y*, ako R važi između *x* i *y*, onda R ne važi između *y* i *x*: simbolično, R je antisimetrična ako i samo ako

(5) $(x)(y)(x \neq y \,\&\, Rxy \rightarrow \neg Ryx)$.[24]

Tada <, mada nije asimetrično, ono jeste antisimetrično, zato što ako su *a* i *b različiti* brojevi, takvi da $a < b$, odatle sledi da $\neg b < a$. Ekvivalentna formulacija definicije antisimetrije jeste

(6) $(x)(y)(Rxy \,\&\, Ryx \rightarrow x = y)$

- relacija R je antisimetrična ako i samo ako za bilo koje *x* i *y*, takvo da R važi i između *x* i *y* i između *y* i *x*, *x* jeste istovetno sa *y*.

Pri ispitivanju međusobnih veza između svojstava relacija koje su do sada određene prva stvar koju treba napomenuti jeste da relacija obično neće biti i simetrična i asimetrična. Ali samo u krajnjem slučaju će se dogoditi da relacija ne uspeva da važi baš između ničega. Pa je zbog toga lako dokazati

156 $\neg(\exists x)(\exists x)Rxy \vdash (x)(y)(Rxy \rightarrow Ryx)$
157 $\neg(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash (x)(y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$

(ovo su 'relacione analogije' sa 133). Na primer, biti ženski brat od, ne važi između nijednog objekta i zato je ujedno i simetrična i asimetrična (i iz tog razloga antisimetrična). S druge strane, ako relacija važi *u celini* (t.j. obostrano /prim.prev./), ona ne može biti ujedno i simetrična i asimetrična; lako možemo dokazati

158 $(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash \neg((x)(y)Rxy \rightarrow Ryx) \,\&\, (x)(y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$.

Potreba za egzistencijalnom asumpcijom u 158 neposredno odgovara sličnoj potrebi u slučaju izvesnih načela teorije silogizma, kao što smo to videli u prethodnom odeljku.

Mada relacija koja važi obostrano ne može biti *ujedno i* simetrična *i* antisimetrična, ona može biti *nijedno od dvoje*. Na primer, voleti, za koju smo videli da nije asimetrična, takođe nije simetrična. Bilo koji primer neuzvraćenih osećanja zadovoljiće (2). Možemo reći da je relacija R *ne-simetrična* ako nije niti simetrična niti asimetrična; simbolička definicija dobijena je jednostavno na osnovu obrazovanja konjunkcije (2) i (4). Tada apsolutno možemo dokazati da je *bilo koja* relacija ili simetrična, ili asimetrična, ili ne-simetrična; možemo dokazati i da, ako relacija važi obostrano, tada ne može biti ništa drugo do jedna od ove tri. (Ako relacija ne uspeva da važi, onda, mada je simetrična i asimetrična, ona nije ne-simetrična.)

Svaka asimetrična relacija je antisimetrična. Lako je dokazati

---

[24] Upotrebljavamo '$x \neq y$' kao dogovorenu skraćenicu za '$\neg(x = y)$'.

159 $(x)(y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \vdash (x)(y)(x \neq y \,\&\, Rxy \rightarrow \neg Ryx)$

- ako imamo uslov za asimetriju R, uslov za antisimetriju R-a odatle sledi. Obratno, naravno, ne važi; zbog toga što je < antisimetrično, ali ne i asimetrično. < nije simetrično (3 < 4, ali nije slučaj da je 4 < 3), tako da ono služi i kao primer antisimetrične relacije koja je ne-simetrična. Antisimetrična relacija može takode biti simetrična. Mada je to sasvim neobično, primer jeste = , zbog toga što lako možemo dokazati da $(x)(y)(x \neq y \,\&\, x = y \rightarrow y \neq x)$.

Sasvim drugačije svojstvo koje mnoge relacije poseduju jeste svojstvo *tranzitivnosti*. Relacija R je tranzitivna ako, za bilo koje x, y i z, ako R važi između x i y, kao i između y i z, onda važi iz medu x i z. Tako je R tranzitivna ako i samo ako

(7) $(x)(y)(z)(Rxy \,\&\, Ryz \rightarrow Rxz)$.

Biti istih godina kao, jeste tranzitivno, isto kao što je i simetrično; zbog toga što, ako je a istih godina kao b, a b istih godina kao c, tada je a istih godina kao c. Identitet je tranzitivan s obzirom na 140. Relacija < je očito tranzitivna, mada asimetrična. ≤ je takode tranzitivna, mada ne-simetrična. Prethodne se distinkcije otuda tiču i tranzitivnosti. Ne biti identičan sa (biti različit od), međutim, nije tranzitivno, mada se to obično pretpostavlja. Na primer, $10 \neq 11$ i $11 \neq 7 + 3$, ali $10 = 7 + 3$. (7) ne uslovljava da x, y i z budu različiti objekti.

R je *intranzitivna* ako i samo ako

(8) $(x)(y)(z)(Rxy \,\&\, Ryz \rightarrow \neg Rxz)$.

Biti otac od, jeste intranzitivno (i asimetrično); zbog toga što ako je a otac od b, a b otac od c, a nije otac (već deda) od c. Numerička relacija razlikovanja za 1 od, jeste intranzitivna; zbog toga što, ako se a razlikuje za 1 od b, a b za 1 od c, ili je $a = c$, ili se a razlikuje za 2 od c, a u oba slučaja a se ne razlikuje za 1 od c. Ova je relacija takode simetrična. Isto tako postoje intranzitivne ne-simetrične relacije; probaj da neku od njih sam zamisliš.

Relacija R *nije* tranzitivna ako i samo ako

(9) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \,\&\, Ryz) \,\&\, \neg Rxz)$.

(9) se može dobiti na osnovu odgovarajuće transformacije (7). Na sličan način, R nije intranzitivno ako i samo ako

(10) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \,\&\, Ryz) \,\&\, Rxz)$.

Paralelno sa definicijom ne-simetrije možemo odrediti da R bude *ne-tranzitivna* u slučaju kada R nije ni tranzitivna niti intranzitivna; simbolička formulacija proishodi iz pridružavanja (9) i (10). Kao u slučaju ranijih relacija, lako je pokazati da ako relacija R ne uspeva da važi uopšte tada je R ujedno i tranzitivna i intranzitivna. Pored toga, sve relacije su ili tranzitivne, ili intranzitivne ili ne-tranzitivne.

Značajna su još tri svojstva relacija ali ona nisu nezavisna od prethodnih svojstava, kao što ćemo to videti. Relacija R je *refleksivna* ako, za bilo koje x. R važi između x i sebe samog, x; tako je R refleksivna ako i samo ako

(11) $(x)\mathrm{R}xx$.

S obzirom na 138, = je refleksivno; takve su i relacije biti istih godina kao i, biti iste visine kao i, imati istu boju očiju kao i, i imati iste roditelje kao i. Zbog toga što je svako svojeg godišta i visine, itd. R je *irefleksivna*, s druge strane, ako za bilo koje x, nije slučaj da R važi između x i x: tako je R irefleksivna ako i samo ako

(12) $(x)\neg\mathrm{R}xx$.

Biti različit od, jeste irefleksivna relacija. Relacija R može da ne bude ni refleksivna niti irefleksivna i to će biti samo u slučaju da važi

(13) $(\exists x)\mathrm{R}xx\ \&\ (\exists x)\neg\mathrm{R}xx$.

Tada kažemo da je R *ne-refleksivna*. Po svoj prilici voleti jeste ne-refleksivno; postoje oni koji su samoljubivi (što nije irefleksivno) i postoje oni koji to nisu (što nije refleksivno).

Svaka je relacija ili refleksivna, ili irefleksivna, ili ne-refleksivna i uvek je samo jedna od ove tri. Ovo je istinito bez obzira da li relacija važi obostrano, ona je irefleksivna, ali niti je refleksivna niti ne-refleksivna. Lako možemo dokazati

160 $\neg(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}xy \vdash (x)\neg\mathrm{R}xx$
161 $\neg(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}xy \vdash \neg(x)\mathrm{R}xx$
162 $\neg(\exists x)(\exists y)\mathrm{R}xy \vdash \neg((\exists x)\mathrm{R}xx\ \&\ (\exists x)\neg\mathrm{R}xx)$.

Razlika između ove grupe svojstava i prethodnih grupa koje se nižu oko simetrije i tranzitivnosti postaje suštinska zbog toga što tri poslednja određenja po svojem obliku nisu *kondicionalna*, pa se ne mogu tako trivijalno ispostaviti kao istinita time što su njihovi

antecedenti uvek lažni, kako je to već važilo u ranijim slučajevima. U stvari, 161 odražava našu asumpciju da nijedan univerzum nije prazan; ako je relacija refleksivna, t.j. ako važi (*x*)R*xx*, na osnovu 104 sledi da (∃*x*)R*xx*, tako da R važi bar u nekom slučaju.

Od različitih međusobnih veza koje postoje između 10 ovde određenih svojstava relacije, tri najvažnije dokazane su u okviru tri sledeća sekventa. Prvo, *sve asimetrične relacije su irefleksivne*, što možemo videti iz sekventa

163 (*x*)(*y*)(R*xy* –> ¬R*yx*) ⊢ (*x*)¬R*xx*

1	(1)	(*x*)(*y*)(R*xy* –> ¬R*yx*)	A
1	(2)	(*y*)(R*ay* –> ¬R*ya*)	1 UE
1	(3)	R*aa* –> ¬R*aa*	2 UE
1	(4)	¬R*aa*	3 SI(S) 23
1	(5)	(*x*)¬R*xx*	4 UI

Pretpostavljamo uslov asimetrije u redu (1) i deriviramo uslov irefleksivnosti u redu (5). Dosetka u dokazu leži u dvostrukoj primeni UE pri upotrebi istog proizvoljnog imena *'a'* oba puta. Čitalac bi trebalo da se zadovolji time da razume osnovanost koraka od (2) do (3). Korak od (3) do (4) na nivou je iskaznog računa.

Drugo, *sve irefleksivne i tranzitivne relacije su asimetrične*. U 164 uslov za asimetriju dobijamo kao konkluziju iz uslova za irefleksivnost i tranzitivnost.

164 (*x*)¬R*xx*, (*x*)(*y*)(*z*)(R*xy* & R*yz* –> R*xz*) ⊢ (*x*)(*y*)(R*xy* –> ¬R*yx*)

1	(1)	(*x*)¬R*xx*	A
2	(2)	(*x*)(*y*)(*z*)(R*xy* & R*yz* –> R*xz*)	A
2	(3)	(*y*)(*z*)(R*ay* & R*yz* –> R*az*)	2 UE
2	(4)	(*z*)(R*ab* & R*bz* –> R*az*)	3 UE
2	(5)	R*ab* & R*ba* –> R*aa*	4 UE
1	(6)	¬R*aa*	1 UE
1,2	(7)	¬(R*ab* & R*ba*)	5,6 MTT
1,2	(8)	¬R*ab* v ¬R*ba*	7 SI(S)1.5.1(g)
1,2	(9)	R*ab* –> ¬R*ba*	8 SI(S)48
1.2	(10)	(*y*)(R*ay* –> ¬R*ya*)	9 UI
1,2	(11)	(*x*)(*y*)(R*xy* –> ¬R*yx*)	10 UI

Ovde se dosetka sastoji u koraku UE od (4) ka (5), u kojem je *'z'* eliminisano u korist već prisutnog *'a'*. Ovo daje konsekvent R*aa*, čiju negaciju dobijamo iz (1) (red (6)), a to otvara put za rasuđivanje

iskaznim računom koje vodi ka (9). Zbog toga što (1) i (2) gube i '*a*' i '*b*', koraci UI u redovima (10) i (11) su opravdani.

Treće, sve *intranzitivne relacije su irefleksivne*. Dokaz sekventa koji sadrži ovo obaveštenje u osnovi nalikuje na onaj iz 163.

165 $(x)(y)(z)(Rxy \& Ryz \rightarrow \neg Rxz) \vdash (x)\neg Rxx$

1	(1)	$(x)(y)(z)(Rxy \& Ryz \rightarrow \neg Rxz)$	A
1	(2)	$(y)(z)(Ray \& Ryz \rightarrow \neg Raz)$	1 UE
1	(3)	$(z)(Raa \& Raz \rightarrow \neg Raz)$	2 UE
1	(4)	$Raa \& Raa \rightarrow \neg Raa$	3 UE
5	(5)	Raa	A
5	(6)	$Raa \& Raa$	5,5 &I
1,5	(7)	$\neg Raa$	4,6 MPP
1,5	(8)	$Raa \& \neg Raa$	5,7 &I
1	(9)	$\neg Raa$	5,8 RAA
1	(10)	$(x)\neg Rxx$	9 UI

Iz ova tri načela mogu se izvesti različite konkluzije o tome kakve kombinacije svojstava relacije ne mogu imati. Dovoljan će biti jedan primer. Ako relacija važi obostrano - onda ona ne može biti i irefleksivna i tranzitivna i simetrična. Zbog toga što ako je irefleksivna i tranzitivna, ona je na osnovu 164 asimetrična. A ako ona važi obostrano, kao što smo videli ranije, ona nije i simetrična i asimetrična. Važno je zapaziti da se ova konkluzija suštinski zasniva na asumpciji da relacija važi; zato što ako $\neg(\exists x)(\exists y)Rxy$, onda je R i irefleksivna i tranzitivna i simetrična.

Ovo proučavanje relacija može biti daleko više razvijeno nego što smo to u mogućnosti da preduzmemo u ovoj knjizi. Ali najbolje je da ono bude sprovedeno unutar mreže logičke discipline koja je obuhvatnija od predikatskog računa. Disciplina koja bi trenutno bila pogodna za ovo proučavanje jeste *teorija klasa*, učenje o klasama objekata i relacije članstva između objekta u klasi i same klase. Terminima klasa može se odrediti sam pojam relacije; proizilazi da su relacije zapravo posebna vrsta klase. Teorija klasa je zaista toliko moćan logički sistem da se u okviru nje mogu odrediti svi *matematički* pojmovi: prirodni brojevi, racionalni brojevi, realni brojevi, mogu biti uzeti kao posebne vrste klasa. Ova je mogućnost navela izvesne filozofe da predlože tezu da cela matematika može biti reducirana na logiku - tezu koja je takođe van dosega koji ova knjiga razmatra.

Međutim, izučavanje teorije klasa se može shvatiti i kao sledeći korak koji bi trebalo da preduzme onaj čitalac koji bi želeo da ide dalje od onoga što je ovde izloženo; izuzetan uvod je Suppes /25/, a Dodatak B ove knjige u osnovnim crtama prikazuje početne stupnjeve ove teorije.

Mada nismo razvili notaciju za njihovo egzaktno izražavanje, postoje izvesni pojmovi koji su toliko široko prihvaćeni u vezi sa relacijama da je vredno, radi obaveštenja, ovde bar neformalno izložiti njihovo tumačenje. Formalno tumačenje predstoji unutar teorije klasa. Pod *domenom* relacije R shvatamo klasu objekata za koje važi relacija R prema nečemu. Tako je domen relacije voleti klasa svih ljubavnika, domen relacije biti roditelj jeste klasa svih majki i očeva. S druge strane pod *konverznim domenom* (ponekad zvanim *opsegom* (range)) relacije R shvatamo klasu objekata takvih da nešto preuzima relaciju R prema njima. Tako je konverzni domen relacije voleti klasa svih voljenih stvari, konverzni domen relacije biti roditelj jeste klasa svih stvari sa roditeljima, koji ako ćemo verovati Bibliji, ne uključuje svakog. *Polje* (field) relacije R jeste klasa stvari koja je ili u domenu ili u konverznom domenu R: klasa stvari, zapravo koja ili preuzima relaciju R prema nečemu ili je sama preuzela relaciju R od nečega. Tako je polje relacije voleti klasa stvari koje vole ili su voljene - klase koja, po svemu sudeći, nema Scroogea kao člana[25]. Relacija koja ne važi između nečega ima *prazno* polje - polje koje nema članova.

Detaljniji formalni prikaz ovih ideja sastojao bi se u sledećem: *a* pripada domenu R ako i samo ako

(14) $(\exists x)Rax$;

a pripada konverznom domenu R ako i samo ako

(15) $(\exists x)Rxa$;

a pripada polju R ako i samo ako

(16) $(\exists x)Rax \vee (\exists x)Rxa$.

Formalni razvoj logike nećemo nastaviti van ovoga okvira. Međutim, bibliografija sadrži predloge za dalje čitanje.

---

25 Scrooge Ebenezer, uskogrudi i škrti junak Dickensovog *Christmas Caroll* -prim. prev.

V e ž b e

1 (a) Dokaži međuizvodivost (5) i (6) iz ovog teksta.
(b) Dokaži validnost sekvenata 156-162 iz ovog teksta.

2 Nazovimo relaciju R *serijalnom* ako $(x)(\exists y)Rxy$, t.j. ako sve ima relaciju R prema nečemu. Tako je manje od ('<') serijalno u univerzumu prirodnih brojeva, zato što za svaki broj postoji broj od kojeg je ovaj manji (ne postoji najveći prirodan broj.)
(a) Dokaži da je = serijalno: t.j. dokaži - $(x)(\exists y)(x = y)$.
(b) Dokaži da ako je relacija R serijalna onda nije prazna:

t.j. dokaži $\vdash (x)(\exists y)Rxy \rightarrow (\exists x)(\exists y)Rxy$

(c) Dokaži da su sve serijalne, tranzitivne i simetrične relacije refleksivne.

3 Uzimajući tranzitivnu relaciju, pokaži da je ona i refleksivna ako i samo ako je asimetrična.

4 Relacija biti brat ili sestra od intuitivno izgleda i tranzitivna i refleksivna, dok bi na osnovu 164 sledilo da je asimetrična, što je očito da nije. Kako bi objasnio ovaj paradoks?

5 Uzimajući da je R i simetrična i antisimetrična, dokaži da nema dve različite stvari koje stoje jedna prema drugoj u relaciji R (i.e. $(x)(y)(x \quad y \rightarrow \neg Rxy)$ i R je intranzitivno. Pa tako dokaži da ako je R refleksivna, simetrična i antisimetrična, tada $(x)(y)(Rxy \leftrightarrow x = y)$. (Ovo dosledno pokazuje da je identitet jedina refleksivna, simetrična i antisimetrična relacija.)

6 Pokaži da nijedna relacija ne može biti:
(a) intranzitivna i refleksivna:
(b) asimetrična i ne-refleksivna;
(c) tranzitivna, refleksivna i asimetrična;
(d) tranzitivna, ne-simetrična i irefleksivna.

7 (a) Iz 156-158 se neposredno može videti da sledi da je R i simetrična i asimetrična ako i samo ako $\neg(\exists x)(\exists y)Rxy$. Dokaži na tome odgovarajući način da je relacija R tranzitivna i intranzitivna ako i samo ako $\neg(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Rxy \,\&\, Ryz)$.
(b) Dokaži dalje da ako je R i tranzitivna i intranzitivna, tada je R asimetrična.

Dodatak A

NORMALNE FORME

Uobičajeno je da se u kurseve elementarne logike uključi i pregled o normalnim formama. Normalne forme imaju izvestan značaj u vezi sa metodom istinosne tablice, zbog toga što pružaju nezavisnu proveru kada je reč o tome da li je wff tautološka, kontingentna ili inkonzistentna; one se takodje upotrebljavaju i u izvesnim dokazima kompletnosti iskaznog računa (vidi o tome u Basson i O'Connor /1/). Medjutim, dokaz kompletnosti koji je dat u ovoj knjizi (Poglavlje 2, Odeljak 5) ne oslanja se na normalne forme, tako da se osećam dužnim da u dodatku predočim njihovo razumevanje. Ono što dalje sledi pretpostavlja terminologiju iz Poglavlja 2, Odeljak 3.

Počinjemo sa odredjenjem normalnih formi. Prvo, kao *atom* shvatam ili iskaznu varijablu ili negiranu iskaznu *varijablu*. Tako su

'P', '¬P', 'Q', '¬R', 'S'

sve zaredom atomi, mada

'¬¬Q'

to nije. Neka $A_1, \ldots, A_n$ bude lista od *n* atoma, gde je *n* veće od, ili jednako sa 1. Tada kao *elementarnu disjunkciju* (e.d.) shvatam formulu čiji je oblik

$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$$

Tako se bilo koja lista atoma, povezanih pomoću 'v', ubraja u elementarnu disjunkciju: na primer,

'(P v Q)'
'(¬P v Q v ¬R)'
'(¬Q v P v Q v ¬S)'
'(P v P v ¬Q)'

sve zaredom jesu elementarne disjunkcije. U graničnom slučaju, gde je $n = 1$, jedinačni atom koji stoji sam takodje se ubraja u elementarnu disjunkciju. Ista se varijabla može pojaviti u e.d. i negirana i nenegirana, kao u trećem primeru, a isti atom se sme pojaviti više od jednog puta, kao u četvrtom primeru.

Na sličan način, pod *elementarnom konjunkcijom* (e.k.) shvatam formulu čiji je oblik

$$(A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ ... \ \& \ A_n)$$

za atome A_1, ..., A_n, gde je n veće od, ili jednako sa 1. Bilo koja e.d. postaje e.k. ako su ´v´ zamenjeni sa ´&´ i obrnuto. Ponovo, u graničnom slučaju, atom koji stoji sam ubraja se u e.k.

Pod *konjunktivnom normalnom formom* (K.N.F.) shvatam formulu čiji je oblik

$$A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ ... \ \& \ A_n,$$

pri čemu su A_1, ..., A_n elementarne *disjunkcije*, za n veće od, ili jednako sa 1. Tako je K.N.F. lanac koji se sastoji od e.d.-a povezanih pomoću ´&´. Na primer,

´(P v Q) & (P v ¬Q v R) & (¬R v S)´
´(P v ¬P v Q) & ¬S´
´(P v ¬Q) & (P v ¬Q)´

sve su redom K.N.F.-e, od kojih druga po redu kao svoju e.d. ima jedinačni atom, dok treća od njih kao dva svoja konjunkta ima istu e.d. U graničnom slučaju kada je $n = 1$, jedinačna e.d. koja stoji sama takode se ubraja u K.N.F., tako da se ´(P v Q)´, ili čak samo ´P´, ubraja u K.N.F.

Na sličan način, pod *disjunktivnom normalnom formom* (D.N.F.) shvatam formulu koja ima sledeci oblik

$$A_1 \ v \ A_2 \ v \ ... \ v \ A_n,$$

pri čemu su A_1,...,A_n elementarne *konjunkcije* za n veće ili jednako sa 1. Tako je D.N.F. lanac e.k.-ja povezanih putem ´v´. Bilo koja K.N.F. postaje D.N.F. ako je svako ´v´ promenjeno u ´&´, a svako ´&´ u ´v´ i obrnuto. U graničnom slučaju kada je $n = 1$ jedinačna e.k. koja stoji sama ubraja se u D.N.F.

Posledica ovih definicija jeste ta da su sve e.k. i e.d. istovremeno i K.N.F. i D.N.F. Uzmi na primer

´P & ¬Q & R´,

a koja je e.k. Ovo je K.N.F. u kojoj svaka od tri e.d. pripada graničnom slučaju koji se odnosi na jedinačni atom. Ista stvar stoji i za granični slučaj D.N.F. gde je broj e.k. jednak sa 1. Kao krajnji primer graničnog slučaja, jedinačni je atom istovremeno i K.N.F. i D.N.F.

Sada opisujem postupak za *redukciju* bilo koje wff iskaznog računa na K.N.F. i na D.N.F. On će se sastojati u iznalaženju, za bilo koju wff, K.N.F. i D.N.F. koja joj je u odgovarajućem smislu *ekvivalentna*. Svi koraci ovoga postupka biće iste vrste, pošto će se sastojati od zamenjivanja nekog dela, ili cele formule, ekvivalentnom formulom. U tu svrhu beležimo sledeće bikondicionale, koji će nam biti neophodni u našoj izradi:

(1) P & P <–> P
(2) P v P <–> P
(3) P & Q <–> Q & P
(4) P v Q <–> Q v P
(5) P & (Q & R) <–> (P & Q) & R
(6) P v (Q v R) <–> (P v Q) v R
(7) ¬¬P <–> P
(8) P –> Q <–> ¬P v Q
(9) (P <–> Q) <–> (P –> Q) & (Q –> P)
(10) ¬(P & Q) <–> ¬P v ¬Q
(11) ¬(P v Q) <–> ¬P & ¬Q
(12) P v (Q & R) <–> (P v Q) & (P v R)
(13) P & (Q v R) <–> (P & Q) v (P & R)

Za svaku od (1)-(13) se može dokazati da su one teoreme iskaznog računa, a na osnovu istinosno-tablične provere da su one takođe i tautologije. (Većina njih bi trebalo da je već poznata iz vežbi i rezultata koji se nalaze u tekstu.) (1) i (2) se ponekad zovu *zakonima idempotencije* za ´&´ i ´v´. (3) i (4) se zovu *zakoni komutacije* za ´&´ i ´v´. (5) i (6) se zovu *zakoni asocijacije* za ´&´ i ´v´. (7) je *zakon dvostruke negacije*. (10) i (11) su oblici *de Morganovih zakona*, a (12) i (13) su *zakoni distribucije*.

S obzirom na svojstvo zakona asocijacije (5) i (6), radi izračunavanja istinosne tablice, dopuštamo sebi da ´složene konjunkcije´ ili ´složene disjunkcije´, kao što je to ´P & Q & ¬R´ ili ´¬P v Q v R´, pišemo bez unutrašnjih zagrada. Dosledno gledano, takvi izrazi nisu wff (vidi definiciju u Poglavlju 2, Odeljak 1), te prema tome K.N.F.-le i D.N.F.-le neće u potpunosti biti dobro obrazovane. Ali, onoliko koliko se to tiče vrednovanja

pomoću tablica nema razlike u tome kakav je raspored umetnutih zagrada. To možemo uporediti sa situacijom u aritmetici kada se radi o znaku ´+´, koji je takođe asocijativan: $(x + y) + z = x + (y + z)$, tako da pouzdano možemo pisati bez zagrada ´5 + 3 + 2´. Za razliku od ´-´ koje *nije* asocijativno: 5 - (3 - 2) = 4, dok je (5 - 3) - 2 = 0, pa je ´5 - 3 - 2´ opasna dvosmislenost. Slično tome, u logici ´—>´ nije asocijativno: ´P —> (Q —> R) <—> (P —> Q) —> R´ nije tautologija, a što bi čitalac trebalo sam da potvrdi. (Da li je ´<—>´ asocijativno ili nije?)

Slično tome, s obzirom na zakone komutacije (3) i (4), poredak u kojem se pojavljuju konjunkti ili disjunkti složene konjunkcije ili disjunkcije neće narušiti vrednovanje pomoću istinosnih tablica. I ovde ´&´ i ´v´ liče na ´+´ u aritmetici, gde imamo $x + y = y + x$; nasuprot tome, ´-´ nije komutativno (5 - 3 = 3, dok je 3 - 5 = -2), niti je to ulogici ´—>´, zbog toga što P —> Q <—> Q —> P nije tautologija. (Da li je ´<—>´ komutativno?)

Dalje, s obzirom na zakone idempotencije (1) i (2) pouzdano možemo izostaviti ponovljene konjunkte ili disjunkte u složenoj konjunkciji ili disjunkciji, a da pri tome ne narušimo vrednovanje pomoću istinosne tablice. U tom smislu, ´&´ i ´v´ *razlikuju se od* ´+´,zbog toga što je očigledno da nemamo kao aritmetičku istinu da $x + x = x$. Takođe, ´—>´ nije idempotentno. (Da li je to ´<—>´?)

U svođenju na normalne forme, mi tražimo, za datu wff, normalnu formu koja će biti *ekvivalentna sa wff s obzirom na proveru pomoću istinosne tablice*: t.j. za bilo koje pripisivanje istinosnih vrednosti za varijable iz te wff normalna forma će imati istu istinosnu vrednost kao prvobitna wff, tako da će bikondicional između wff i njegove normalne forme biti tautologija (uporedi definiciju ekvivalencije iz Poglavlja 3, Odeljak 3). Prema tome, s obzirom na (1)-(6), u traženju normalne forme mi sebi dopuštamo da složenim konjunkcijama i disjunkcijama odbacimo zagrade, preraspodeljujući poredak stavki unutar njih i precrtavajući stavke koje su u njima ponovljene, kada god nam takav potez odgovara. Dalje, s obzirom na (7), dopustićemo sebi da slobodno izostavimo ´¬¬´ kada god to želimo, zbog toga što takav potez takođe ne može narušiti vrednovanje pomoću istinosnih tablica.

U stvari, svi naši potezi u prevođenju wff u normalnu formu pripadaju istoj vrsti: mi zamenjujemo deo date formule (ponekad celu) nekom formulom koja joj je ekvivalentna s

obzirom na proveru pomoću istinosne tablice. A jedine ekvivalencije koje koristimo jesu (1)-(13), ili pak slučajevi substitucije koji se na njih odnose. Trebalo bi da je jasno da nijedan potez ove vrste neće narušiti vrednovanje dobijeno pomoću istinosne tablice, tako da će normalna forma koja se pojavljuje na samom kraju ovoga procesa biti ekvivalentna datoj wff, što se zapravo i želelo postići. Ali da bismo to i zabeležili utvrđujemo, mada ne dokazujemo, načelo zamenjivanja kojim se rukovodimo u našem radu:

(Z) Ako je A ekvivalentno sa B, a D proizilazi iz C na osnovu zamenjivanja događanja A u C pomoću B, tada je C ekvivalentno sa D, za bilo koju od formula A, B, C, D.

Zajedno sa (1)-(7), ovo načelo zapravo opravdava potez oko čijeg obrazovanja smo se već saglasili (izbacivanje ´¬¬´, preraspoređivanje konjunkata u konjunkciji, itd.)

Redukcija wff na K.N.F. i D.N.F. se obično mogu podeliti na dva nivoa, od kojih je prvi zajednički za obe redukcije.

Nivo I. Ovde je svrha to da se dobije formuls sa tri sledeća svojstva: (i) ´¬¬´ se nigde ne pojavljuje; (ii) jedini veznici koji se pojavljuju jesu ´¬´, ´&´, ili ´v´; (iii) ´¬´ se pojavljuje samo ispred iskaznih varijabli, nikako ispred zagrade (u stvari, svakako, (iii) povlači (i)).

Što se tiče (i), ovaj zahtev jednostavno je zadovoljen izbacivanjem ´¬¬´, što je u skladu sa (7). Međutim, naš prvi korak biće da eliminišemo bilo koje od događanja ´—>´ ili ´<—>´ u wff. Ovo se može postići s obzirom na (8) i (9), koji nam dozvoljavaju da zamenimo bilo koji kondicional disjunkcijom čiji prvi disjunkt je negacija njegovog antecedenta, a drugi disjunkt njegov konsekvent, kao isto tako i da zamenimo bilo koji kondicional određenom konjunkcijom dva kondicionala, od kojih se svaki zaredom može eliminisati na ovde opisani način.

Kada je ovaj korak upotpunjen imaćemo formulu koja zadovoljava uslov (ii). Međutim, može se dogoditi slučaj da se ´¬´ u ovoj formuli pojavljuje izvan zagrade, tako da nije zadovoljeno (iii). I ovde glavni veznik unutar zagrade sada može biti ili ´&´ ili ´v´, tako da formula ima ili približno ovaj oblik

¬(...&...)

ili približno ovaj oblik

$$\neg(...v...).$$

Ako se dogodi prvi slučaj možemo da primenimo (10) i taj deo zamenimo disjunkcijom čiji disjunkti su negacije prvobitnih disjunkata unutar zagrade; ako se dogodi drugi slučaj na sličan način možemo primeniti (11) i zameniti negiranu disjunkciju konjunkcijom sa negiranim konjunktima. Kao rezultat ovih poteza još se uvek može dogoditi slučaj da se ´¬´ pojavljuje ispred zagrade. Ali bi trebalo da je jasno da ćemo *ponavljanjem* poteza ove vrste eventualno moći da stavimo ´¬´ na taj način što će se pojavljivati, ukoliko ih uopšte bude, jedino ispred varijabli, tako da će uslov (iii) biti pre ili kasnije ispunjen, a biće upotpunjen i Nivo I.

Postupci koji se odnose na K.N.F. i D.N.F. na ovome mestu se razilaze. Zbog toga ih opisujemo svaki zasebno.

Nivo II (a) (nastavak od K.N.F.) Ako na kraju Nivoa I još nismo postigli K.N.F. to može da bude samo iz jednoga razloga, kao što to jasno iznosi definicija K.N.F.: na jednom ili više mesta mora postojati događanje ´&´ koje je podređeno nekom događanju ´v´. Ukoliko to pak nije tako, za date uslove (i)-(iii) Nivoa I, trebalo bi zapravo da imamo K.N.F. Odatle sledi (mada to može iziskivati preraspoređivanje disjunkata) da neki deo date formule ima oblik

$$...v\ (...\&...)$$

Korišćenjem (12), ov može biti zamenjemo formulom koja ima oblik

$$(...v...)\ \&\ (...v...)$$

u kojem je ´v´ stavljeno u subordinirani položaj, a ´&´ u subordinirajući. Naravno, može se dogoditi da je ´&´ još uvek subordinirano u odnosu na neka druga događanja ´v´; ali u tom slučaju postupak možemo primeniti iznova. Možemo eventualno, koristeći samo ekvivalenciju (12), ili njene slučajeve substitucije, staviti sve ´&´ u subordinirajuće položaje a sve ´v´ prevesti u subordinirane položaje. Ishod će biti K.N.F. (Kako možemo biti sigurni da će svi konjunkti K.N.F. biti *elementarne* disjunkcije?)

Nivo II (b) (nastavak od D.N.F.) Na osnovu sasvim sličnih razmatranja možemo uvideti da ako ishod Nivoa I još nije

D.N.F., tada mora postojati barem jedno događanje ´v´ koje je subordinirano prema ´&´. Stoga sledi da neki njen deo, možda nakon preraspoređivanja konjunkata, ima oblik

...& (...v...)

Koristeći (13) ovo može biti zamenjeno formulom čiji je oblik

(...&...) v (...&...),

a ponavljajući korake ove vrste možemo dovesti sve ´v´ u subordinirajuće položaje a sve ´&´ u subordinirane položaje. Ishod će biti D.N.F.

Ove postupke ilustrujemo na primeru wff srednje dužine

(i) S –> ¬((P –> Q) –> R)

Krećući se na Nivou I primenjujemo (8) da bismo pretvorili ova tri kondicionala u disjunkcije. Ovo daje

(ii) ¬S v ¬(¬(¬P v Q) v R)

Ovo zadovoljava drugi uslov Nivoa I, ali postoje još dva slučaja ´¬´ van zagrada. Primenjujemo (11) na drugi disjunkt iz (ii) da bismo dobili

(iii) ¬S v (¬¬(¬P v Q) & ¬R),

ili, izbacujući dvostruku negaciju,

(iv) ¬S ((¬P v Q) & ¬R).

Sada je Nivo I očigledno upotpunjen, ali ishod nije ni K.N.F. niti D.N.F. Zato prelazimo na Nivo II(a). Treba imati u vidu da je, u (iv), događanje ´&´ uzajamno subordinirano glavnom vezniku ´v´. Prema tome (12) možemo primeniti na (iv) kao celinu i tako dobiti

(v) (¬S v (¬P v Q)) & (¬S v ¬R).

Unutar prvoga konjunkta u (v) zagrade na osnovu (6) nisu neophodne, pa sada imam K.N.F.,

(vi) (¬S v ¬P v Q) & (¬S v ¬R).

Sada se vraćamo na (iv) i prelazimo na Nivo II(b). Prvi disjunkt ´¬S´ iz (iv) biće, naravno, c.k. za našu željenu D.N.F. i neophodno nam je samo da se usredsredimo na ´v´ koje je subordinirano u odnosu na ´&´. Preraspoređujući konjunkte, dobijamo

(vii) ¬S v (¬R & (¬P v Q)),

odakle, primenjujući (13) na drugi disjunkt, dobijamo

(viii) $\neg S \lor ((\neg R \,\&\, \neg P) \lor (\neg R \,\&\, Q))$.

Ovo je zapravo D.N.F. i možemo izostaviti par zagrada da bismo dobili

(ix) $\neg S \lor (\neg R \,\&\, \neg P) \lor (\neg R \,\&\, Q)$.

U stvarnoj praksi Nivo II deluje daleko odbojnije, mada su neophodna načela veoma jednostavna. To je zato što primena distributivnih zakona udvostručuje broj zagrada, a formula koja odatle proizilazi može biti gotovo dvostruko duža u odnosu na prvobitnu. Studenti koji vežbaju normalnu formu ne smeju time biti obeshrabreni, a takođe je neophodno da neposredno obrate pažnju na stavljanje zagrada u svoje formule. Na Nivou II bi takođe trebalo imati u vidu da često postoji mogućnost izbora s obzirom na to gde se može početi sa subordiniranim događanjima ´v´ ili ´&´. Kao posledica toga, od iste prvobitne formule mogu se dobiti različite K.N.F. i D.N.F. - ne postoji *jedinstvena* K.N.F. ili D.N.F. date formule.

Pre nego što predstavimo neki od načina upotrebe K.N.F. i D.N.F. prvo utvrđujemo neke očigledne ekvivalencije. Neka T bude *bilo koja* tautologija, a I *bilo koja* inkonzistencija; tada su tautologije i:

(14) $T \lor P \leftrightarrow T$

(15) $T \,\&\, P \leftrightarrow P$

(16) $I \lor P \leftrightarrow P$

(17) $I \,\&\, P \leftrightarrow I$

Na osnovu (14) disjunkcija sa tautologijom i sama je tautologija, a na osnovu (17) konjunkcija sa inkonzistentnim konjunktom je i sama inkonzistencija. Na osnovu (15) konjunkcija sa tautološkim konjunktom je ekvivalentna sa drugim konjunktom (pa zato kada vršimo evaluaciju pomoću istinosnih tablica ovaj prethodni možemo zanemariti), a na osnovu (16) disjunkcija sa inkonzistentnim disjunktom ekvivalentna je drugom disjunktu (pa zato kada vršimo evaluaciju pomoću istinosnih tablica ovaj prethodni možemo zanemariti).

Iz (15) sledi da (*a*) složena konjunkcija jeste tautološka ako i samo ako je svaki od konjunkata tautološki, a iz (16) da (*b*) složena disjunkcija jeste inkonzistentna ako i samo ako je svaki od njenih disjunkata inkonzistentan. Iz (*a*) možemo izvesti da *elementarna* konjunkcija nikada ne može biti tautološka zato što nijedan atom ne

može biti tautološki; slično, nijedna *elementarna* disjunkcija ne može biti inkonzistentna. Međutim, možemo utvrditi

(*c*) E.d. je tautološka ako i samo ako ima među konstituentnim atomima iskaznu varijablu, kao i negaciju te iste varijable.

Pretpostavimo tako da e.d. sadrži varijablu, recimo 'P', a takođe i '¬P', negaciju te varijable. Tada, raspoređujući atome, ukoliko je to neophodno, možemo ih urediti tako da dobiju oblik

$$P \vee \neg P \vee \ldots,$$

odakle sledi, na osnovu (14), da je on tautološki. Obratno, ukoliko joj kao atom nedostaje bilo koja varijabla zajedno sa negacijom te iste varijable, možemo pronaći pripisivanje istinosnih vrednosti koje čini svaki od atoma lažnim (naime, za varijable koje se pojavljuju negirane, vrednost T, a za varijable koje se pojavljuju ne-negirane, vrednost F), te tako doći do toga da je cela e.d. lažna. Slično, koristeći (17), možemo pokazati

(*d*) E.k. je inkonzistentna ako i samo ako ona ima među svojim konstituentnim atomima iskaznu varijablu i negaciju te iste varijable.

Iz (*a*) i (*c*) izvodimo da je K.N.F. tautološka ako i samo ako su sve njene e.d. tautološke, t.j. ako i samo ako *svaka e.d. u njoj ima među svojim konstituentnim atomima iskaznu varijablu i negaciju te iste varijable*. Drugim rečima, mi iz K.N.F. možemo 'iščitati' wff, bila ona tautološka ili ne. Na primer, iz (vi) gore možemo zaključiti da (i) nije tautološko, pošto (vi) ima barem jednu e.d. kojoj nedostaje varijabla i negacija te iste varijable (zapravo, u ovom su slučaju *obe* takve).

Slično tome, iz (*b*) i (*d*) možemo zaključiti da je D.N.F. inkonzistentna ako i samo ako su sve njene e.k. inkonzistentne, t.j. ako i samo ako *svaka e.k. u njoj ima među svojim konstituentnim atomima iskaznu varijablu i negaciju te iste varijable*. Na primer, iz (ix) gore izvodimo da (i) nije inkonzistentno, pošto (ix) ima barem jednu e.k. kojoj nedostaje varijabla i negacija te iste varijable. U stvari, sada možemo zaključiti da (i), budući da ono nije ni tautološko niti inkonzistentno, jeste kontingentno. Razmatrajući drugi konjunkt iz (vi), vidimo da pripisivanje S=T, R=T čini (i) lažnim; a razmatrajući prvi disjunkt iz (ix), vidimo da pripisivanje S=F čini (i) istinitim. Govoreći uopšteno, za bilo koju wff, na osnovu bilo

koje K.N.F. koja joj je ekvivalentna, vrlo jednostavno možemo reći da li je ona tautološka ili nije, tako da redukcija na K.N.F. i D.N.F. omogućuje proveru s obzirom na to da li je wff tautološka, kontingentna, ili inkonzistentna, a koja je nezavisna od provere putem istinosnih tablica. Redukcija na normalnu formu može nas poštedeti posla na proveri pomoću istinosnih tablica - mada po cenu druge vrste posla.

Izvesnu pažnju treba pridati normalnim formama posebne vrste koje se ponekad zovu *kanoničkim*. *Kanonička konjunktivna normalna forma* (K.K.N.F.) jeste K.N.F. u kojoj se svaka iskazna varijabla koja se događa (negirana ili ne-negirana) u nekoj e.d. - događa (negirana ili ne-negirana) u svim e.d. u K.N.F. Korespodentno tome, *kanonička disjunktivna normalna forma* (K.D.N.F.) jeste D.N.F. u kojoj se svaka iskazna varijabla koja se događa (negirana ili ne-negirana) u nekoj e.k. - događa (negirana ili ne-negirana) u svim e.k. u D.N.F. Na primer (vi) gore nije kanonička, pošto se ´R´ pojavljuje u drugoj e.d. ali ne u prvoj, a (ix) nije kanonička, pošto se ´S´ ne pojavljuje ni u drugoj ni u trećoj e.k. S druge strane,

´(P v ¬Q v ¬R) & (Q v ¬P v R)´

jeste K.K.N.F., a međusobna zamena ´&´ i ´v´ u njoj pruža K.D.N.F.

Da bismo iz ne-kanoničke normalne forme dobili kanoničku navodimo prvo dve ekvivalencije

(18) P <—> (P v Q) & (P v ¬Q)
(19) P <—> (P & Q) v (P & ¬Q)

Ako, sada, data K.N.F. nije K.K.N.F., mora postojati neka varijabla koja se događa u nekoj e.d. u datoj formi a koja se ne događa u svim e.d. u toj formi. Možemo upotrebiti (18) da bismo zamenili bilo koju e.d. kojoj nedostaje data varijabla parom iz e.d. od kojih svaka sadrži tu varijablu koju takođe sadrže i drugi atomi date e.d.; u jednom članu tog para ona se pojavljuje nenegirana, a u drugom negirana. Na primer, ako želimo da (vi) transformiramo u K.K.N.F., treba da zamenimo prvu konjunkciju sa

´(¬S v ¬P v Q v R) & (¬S v ¬P v Q v ¬R)´,

sa kojom je ona na osnovu (18) ekvivalentna, dobijajući tako dve e.d. u kojima se pojavljuju sve četiri varijable (vi). (Preostao bi još zadatak transformisanja drugog konjunkta iz (vi) u e.d. koje sadrže sve četiri varijable.) Ponovljena upotreba (18) će tako

transformisati K.N.F. koja nije kanonička u ekvivalentnu K.K.N.F. Na sasvim sličan način možemo, koristeci (19), transformisati bilo koju D.N.F. koja nije kanonička u K.D.N.F.

Kada je data kanonička normalna forma možemo je pojednostaviti tako što ćemo (i) ukloniti ponavljanja atoma koji se događaju u bilo kojoj e.d. ili e.k. u toj formi, (ii) ukloniti ponavljanja e.d. ili e.k. u toj formi, (iii) u slučaju K.N.F. uklanjajući tautološke e.d. u skladu sa (15), a u slučaju D.N.F., uklanjajući inkonzistentne e.k. u skladu sa (16). S obzirom na (iii), normalna forma može u celini izostati, a to će se dogoditi ako je K.N.F. tautološka ili ako je D.N.F. inkonzistentna. U tom slučaju saglasni smo sa tim da, prema potrebi, pišemo 'P v ¬P', odnosno 'P & ¬P'. Rezultat ovih manevara nazovimo *izrazitom*[1] (distinguished) (konjunktivnom ili disjunktivnom) normalnom formom. Tada se može pokazati, za svaku wff, da je njena izrazita (konjunktivna ili disjunktivna) normalna forma *jedinstvena*, nezavisno od varijacija u redosledu atoma njenih e.d. ili e.k., kao i u redosledu samih e.d. ili e.k. Štaviše, ove forme stoje u neposrednom odnosu sa istinosnom tablicom za datu wff, tako što se istinosna tablica može iščitati iz bilo koje od ovih formi i što se ove forme mogu iščitati iz nje.

Ovo se možda najbolje može pokazati pomoću primera. Pretpostavimo da wff A sadrži tri varijable 'P', 'Q', 'R' i da, kada se na njih primeni istinosna tablica, daju sledeće kolone s obzirom na glavni veznik:

P	Q	R	A
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Izdvajajući ona pripisivanja za koja je A istinito, možemo zapaziti odgovarajuće e.k. u kojima se varijabla pojavljuje kao nenegirana ako u pripisivanju dobija vrednost T, a negirana ako

[1] Ovaj oblik normalne forme naziva se još i *savršena* normalna forma - prim. prev.

dobija vrednost F. Prema tome, s obzirom na redove 1, 4 i 6 gornje tablice, imamo

'(P & Q & R)'
'(P & ¬Q & ¬R)'
'(¬P & Q & ¬R)'.

Obrazujući disjunkciju od ova tri reda dobijamo izrazitu D.N.F. koja je, što je sasvim evidentno, ekvivalentna sa datom wff A. Obrnuto, kada je za izvesnu wff data izrazita D.N.F., svaka od e.k. u njoj određuje pripisivanje vrednosti njenim varijablama za koje je wff istinita i za nju se može zabeležiti istinosna tablica. Prema tome, izrazita D.N.F. neke wff obuhvata u simboličkom obliku rezultat provere pomoću istinosne tablice te iste wff.

Slične se ocene mogu dati za izrazitu K.N.F. Nadovezujući se na gornji primer, korespondentno svakom od pripisivanja za koje proizilazi da je A lažno, možemo zabeležiti e.d. u kojima se varijable pojavljuju *negirane* ukoliko dobijaju vrednost T za to pripisivanje, a *nenegirane* ukoliko dobijaju vrednost F. Tako, prema redovima 2, 3, 5, 7 i 8 u ovoj proveri, dobijamo

'¬P v ¬Q v R'
'¬P v Q v ¬R'
'P v ¬Q v ¬R'
'P v Q v ¬R'
'P v Q v R'.

Formirajući od njih konjunkciju dobijamo izrazitu K.N.F. koja je ekvivalentna datoj wff (što bi čitalac trebalo da proveri sam za sebe). Obrnuto, kada je data izrazita K.N.F. za izvesnu wff, svaka od e.d. u njoj određuje pripisivanje vrednosti za njene varijable za koje je wff *lažna* i za nju se može zabeležiti istinosna tablica. Izrazita K.N.F., kao i izrazita D.N.F., jeste simboličko otelovljenje provere pomoću istinosnih tablica.

Ipak treba pošteno skrenuti studentima pažnju na to da ako su naprosto dovedeni u priliku da sačine normalnu formu ekvivalentnu nekoj datoj wff *najbrži* način se obično sastoji u izvođenju provere putem istinosne tablice i iščitavanju normalne forme odatle; jedino preimućstvo koje pružaju ove tegobne procedure za dobijanje normalnih formi sastoji se u tome što su one *nezavisne* od provere putem istinosnih tablica.

DODATAK B

ELEMENTARNA TEORIJA KLASA

Ovo je Dodatak kaji je dat sa tom namerom da čitaoci osete ukus onoga na šta će naići ukoliko su skloni sadržajima logike koji prelaze okvire ove knjige. Nije istina da je u logici sve teško: zapravo, kao što ćemo videti, na njenim prvim stupnjevima teorija klasa nije teža od iskaznog računa, sa kojim ima i neposredne sličnosti. Ali na njenim višim stupnjevima, teorija klasa pokreće probleme od velikog značaja za osnove matematike, a koji su do trenutka u kojem ovo pišem ostali nerešeni.

Nije moguće pružiti preciznu definiciju toga šta je to klasa. Intuitivno, klasa je zbirka (collection) entiteta bilo koje vrste, a sa klasama se tipično upoznajemo na dva načina: ili smo dali *listu* (list) njenih članova, ili smo dali *uslov* za članstvo u toj klasi. Razmotrimo onda ova dva načina.

Kada je data lista stvari, recimo Tom, Dick i Harry, možemo utvrditi klasu koja ima baš ove stvari kao članove. Saglasili smo se sa time da damo ime ovoj klasi tako što ćemo obuhvatiti imena sa te liste velikim zagradama. Tako će

'{Tom, Dick, Harry}'

biti naše ime za klasu čiji članovi su baš Tom, Dick i Harry. Slično, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} će biti klasa čiji članovi su prvih deset prirodnih brojeva. Obično se 'jeste član od' skraćuje grčkim slovom 'ε'. Tada će istiniti iskazi biti:

Dick ε{Tom, Dick, Harry}
3 ε {0, 1, 2, 3, 4, 5},
(3 + 3) ε{6, 7, 8, 9}.

Medutim, najčešće klase odredujemo tako što utvrdujemo uslove za članstvo u njima: tako govorimo o klasi stanovnika

Londona, klasi parnih brojeva, klasi ženskih pedikira, itd. Ovo uputstvo za opisivanje klasa upotrebljavamo ili kada je praktično nezgodno poimenično navesti njihove članove (klasa stanovnika Londona), ili kada je teorijski nemoguće to učiniti (klasa parnih brojeva koja je beskonačna po veličini). Služeći se takvim sredstvima kao što su varijable '*x*', '*y*', '*z*', kao u računu predikata, možemo usvojiti notaciju

'{*x*: ...*x*...}'

kao naziv za klasu objekata *x* takvih da ...*x*... Tako će {*x*: *x* naseljava London} biti klasa stanovnika Londona, a {*x*: *x* je paran broj} će biti klasa parnih brojeva. Onda će istiniti biti iskazi

Elizabeta II ε {*x*: *x* naseljava London},
256 ε {*x*: *x* je paran broj}.

Još opštije, klasu će određivati bilo koje svojstvo F, naime, klasa stvari sa svojstvom F, ili {*x*: F*x*}. A proizvoljno izabrani objekat *a* biće član ove klase ako i samo ako on ima svojstvo F. Simbolički:

(P1) $a \,\varepsilon\, \{x: Fx\} <-> Fa.$

(P1) je naše prvo temeljno načelo koje se odnosi na članstvo u klasama. Izgleda da je teško posumnjati u njegovu istinitost ali, mada ćemo ga prihvatiti tek za svrhu koju ima ovaj Dodatak, na kraju ću, makar sasvim uopšteno, u kratkim crtama skicirati razloge za njegovo odbacivanje.

Šta obrazuje identitet neke klase? Na primer, hoćemo da kažemo da je klasa parnih brojeva ista kao klasa brojeva deljivih sa 2 i da je klasa {2, 3, 5, 7} ista kao i klasa prime (prime) brojeva manjih od 10. Klase su *identične* ako imaju dosledno iste članove t.j. ako bilo šta što je član jedne jeste i član druge, i vice versa. Da bismo ovo mogli tačnije ustanoviti usvajamo grčka slova 'α', 'β', 'γ',... kao *klasne varijable*, čiji opseg je ograničen na klase kao što je opseg numeričkih varijabli u algebri ograničen na brojeve. Naše drugo načelo obuhvata klase na sledeći način:

(P2) $(x)(x \,\varepsilon\, \alpha <-> x \,\varepsilon\, \beta) -> \alpha = \beta.$

Ako je neki objekat član α i ako i samo ako je on član β, t.j. ako α i β imaju dosledno iste članove, tada je na osnovu (P2) α i β identično.

Upotrebu (P1) i (P2) možemo ilustrovati tako što ćemo na osnovu njih dokazati sasvim trivijalan rezultat

200 $\vdash \{x: x \varepsilon \alpha\} = \alpha$

200 tvrdi samo to da klasa stvari koje su članovi klase α *jeste* α. Dokaz je lak: kao pojedinačni slučaj (P1), uzimajući "Fx" kao "$x \varepsilon \alpha$", imamo

(1) $a \varepsilon \{x: x \varepsilon \alpha\} <\!\!-\!\!> a \varepsilon \alpha.$

(1) tvrdi da je objekat član $\{x: x \varepsilon \alpha\}$ ako i samo ako je član α, t.j. da dve klase imaju potpuno iste članove. Prema tome, na osnovu (P2), uzimajući 'α' kao $\{x: x \varepsilon \alpha\}$ i 'β' kao α, zaključujemo identitet dveju klasa, što predstavlja rezultat 200. Ovde prećutno upotrebljavamo primenu koraka UI na (1), koji prati korak MPP koji je povezan sa slučajem substitucije (P2). Naši dokazi u Dodatku u potpunosti će se zadržati na ovom neformalnom nivou.

Izvesne operacije sa klasama su od velikog značaja: ovde uvodimo tri koje su najosnovnije. Prvo, kada su date dve klase α i β možemo odrediti *uniju* α i β kao klasu stvari koje su ili članovi iz α ili članovi iz β. Na primer, ako je α {1, 2, 3} a β {2, 3, 4}, tada je unija α i β {1, 2, 3, 4}. Ili ako je α klasa Engleza a β klasa doktora, tada je unija α i β klasa ljudi koji su ili Englezi ili doktori (uključujući tu i engleske doktore). Koristeći simbol koji nas podseća na 'v', pišemo uniju α i β kao '$\alpha \cup \beta$'. Formalna definicija je

Df. $\cup$: $\alpha \cup \beta = \{x: x \varepsilon \alpha \vee x \varepsilon \beta\}$.

Na osnovu (P1) (uzimajući 'Fx' kao '$x \varepsilon \alpha \vee x \varepsilon \beta$') kao neposrednu posledicu ove definicije imamo

201 $\vdash a \varepsilon \alpha \cup \beta <\!\!-\!\!> a \varepsilon \alpha \vee a \varepsilon \beta.$

U razmatranju unije klasa važiće sledeći rezultati:

202 $\vdash \alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha;$
203 $\vdash (\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma);$
204 $\vdash \alpha \cup \alpha = \alpha.$

Od navedenih, dokazao sam samo 202; dokazi 203 i 204 su sasvim slični. Na osnovu 201,

(2) $a \varepsilon \alpha \cup \beta$ <—> $a \varepsilon \alpha \vee a \varepsilon \beta$

(3) <—> $a \varepsilon \beta \vee a \varepsilon \alpha$

(4) <—> $a \varepsilon \beta \cup \alpha$.

Red (3) sledi iz reda (2) na osnovu rasuđivanja putem elementarnog iskaznog računa, a red (4) iz reda (3) na osnovu primene 201 uzimajući 'α' kao β a 'β' kao α. Razlog za 'gomilanje' bikondicionala trebalo bi da je samo-očigledan. Zbog toga što, na osnovu (4), $\alpha \cup \beta$ i $\beta \cup \alpha$ imamo potpuno iste članove, oni su na osnovu (P2) identični.

Drugo, kada su date dve klase α i β, određujemo *presek* (intersection) α i β kao klasu stvari koje su ujedno članovi α i članovi β. Na primer, ako je α {1, 2, 3} i β {2, 3, 4}, tada je presek α i β {2,3}. Ili, ako je α klasa Engleza i β klasa doktora, tada je presek α i β klasa engleskih doktora muškaraca. Presek α i β pišemo kao '$\alpha \cap \beta$'. Tako:

Df. $\cap$: $\alpha \cap \beta = \{x: x \varepsilon \alpha \,\&\, x \varepsilon \beta\}$

Na osnovu (P1), kao neposrednu posledicu imamo

205 $\vdash a \varepsilon \alpha \cap \beta <\!\!-\!\!> a \varepsilon \alpha \,\&\, a \varepsilon \beta$,

a analogije sa 202-204, takođe se mogu vrlo lako dokazati.

206 $\vdash \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$;

207 $\vdash (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$;

208 $\vdash \alpha \cap \alpha = \alpha$.

Razmatrajući 202-204 i 206-208, uniju i presek klasa, terminologijom prethodnog Dodatka, oni su komutativni, asocijativni i idempotentni.

Treće, za bilo koju klasu α određujemo njen *komplement* kao klasu stvari koje nisu članovi iz α. Naravno, na osnovu bilo koje interpretacije teorije klasa, kao u slučaju predikatskog računa, imamo u vidu *ustanovljen univerzum govora* (fixed universe of discourse), komplement klase stoji u zavisnosti sa ovim univerzumom. Tako kada je dat univerzum pozitivnih celih brojeva komplement klase parnih brojeva jeste klasa neparnih brojeva (i obrnuto), i kada je dat univerzum ljudskih bića komplement klase muškaraca jeste klasa žena (i obrnuto). Kada je dat univerzum prirodnih brojeva komplement klase {0, 1, 2} jeste klasa brojeva većih od 2. Komplement označavamo sa 'α''. Tako:

Df.′: $\alpha' = \{x: \neg(x \varepsilon \alpha)\}$.

Na osnovu (P1), neposredna posledica ove definicije je

209 $\vdash a \varepsilon \alpha' \leftrightarrow \neg(a \varepsilon \alpha)$.

Zakon dvostrukog komplementa za klasu pojavljuje se u obliku

210 $\vdash \alpha'' = \alpha$.

Unija, presek i komplementacija klasa međusobno su povezani sa različitim drugim analogijama de Morganovih zakona. Ovde utvrđujemo i dokazujemo samo jednu; čitalac bi trebalo da je u mogućnosti sam za sebe da obrazuje i dokaže ostale, ukoliko to želi.

211 $\vdash (\alpha \cap \beta)' = \alpha' \cup \beta'$.

Na osnovu 209,

(5)	$a \varepsilon (\alpha \cap \beta)'$	$\leftrightarrow \neg(a \varepsilon \alpha \cap \beta)$
(6)		$\leftrightarrow \neg(a \varepsilon \alpha \ \& \ a \varepsilon \beta)$
(7)		$\leftrightarrow \neg(a \varepsilon \alpha) \vee \neg(a \varepsilon \beta)$
(8)		$\leftrightarrow a \varepsilon \alpha' \vee a \varepsilon \beta'$
(9)		$\leftrightarrow a \varepsilon \alpha' \cup \beta'$

(6) ovde sledi iz (5) na osnovu 205, (7) iz (6) na osnovu rasuđivanja pomoću iskaznog računa, (8) iz (7) opet na osnovu 209, a (9) iz (8) na osnovu 201. 211 sada sledi na osnovu (P2), pošto smo već pokazali da $(\alpha \cap \beta)'$ i $\alpha' \cup \beta'$ imaju sasvim iste članove.

Do sada velike zagrade smo koristili *neformalno*, obuhvatajući njima liste imena kao oznake za klase; ali ovo je rešenje moguće iskoristiti *formalno*, tako što ćemo ih odrediti terminima druge naše upotrebe velikih zagrada, kod koje je dat uslov za članstvo u klasi. Na primer, {Tom, Dick} se može odrediti kao klasa čiji članovi jesu *ili Tom ili Dick*. Uopšteno, možemo napisati

$$\{a, b\} = \{x: x = a \vee x = b\}.$$

Tako će $\{a,b\}$ biti klasa čiji su članovi baš a i b, t.j., klasa stvari koje su ili a ili b. Biti član $\{a,b\}$ znači biti ili a, ili b:

212 $\vdash c \varepsilon \{a,b\} \leftrightarrow c = a \vee c = b$.

$\{a,b\}$ možemo nazvati *parna klasa* a i b (pair class of a and b). Pošto i a i b zadovoljavaju 212 sa leve strane, očito da imamo

213 $\vdash a \varepsilon \{a,b\} \ \& \ b \varepsilon \{a,b\}$

Ovo rešenje očigledno da se može proširiti i na klasu sa tri ili više članova. Ono se takođe može proširiti u drugom pravcu, na

klase sa tačno jednim članom. Tako će $\{a\}$ biti klasa čiji je jedini član a. Možemo odrediti

$$\{a\} = \{x: x = a\},$$

i tada će slediti da

214 $\vdash b \,\varepsilon\, \{a\} <\!\!-\!\!> b = a$

215 $\vdash a \,\varepsilon\, \{a\}$.

$\{a\}$ se može zvati *jedinačna klasa* od a (unit class of a). Jedinačna klasa od a nije isto što i samo a; kasnije ćemo videti značaj njihovog razlikovanja.

Može se dogoditi da, kada odredimo uslov za članstvo klase, ispadne da *ništa* ne zadovoljava ovaj uslov. Šta da kažemo o klasi u ovom slučaju? Šta, na primer, reći o $\{x$: x je jednorog$\}$, klasi jednoroga; ili, uopšteno, šta reći o $\{x: Fx\}$ kada je $(x)\neg Fx$? Ovo dokazuje da je teorijski najjednostavnije dozvoliti u ovom slučaju da ta *klasa* postoji i nazvati je *praznom*. Ne postoje jednorozi; ali postoji klasa jednoroga, a jedan od načina da se kaže da ne postoji nijedan jednorog jeste da se kaže da je ta klasa prazna.

Ovo je (možda iznenadujuća) posledica (P2) - da bilo koja dva prazna skupa jesu *identična*. Zbog toga što su dve klase identične ako imaju sasvim iste članove, t.j. ako ne postoji član jedne koji nije član i druge. Ali ako su dve klase prazne, tada ne postoji član jedne klase koji nije član druge, baš zbog toga što ne postoji ni član bilo koje od njih. Prema tome, one su identične. Pokušajmo da ovo izložimo nešto formalnije:

216 $(x)\neg(x \,\varepsilon\, \alpha), (x)\neg(x \,\varepsilon\, \beta) \vdash (x)(x \,\varepsilon\, \alpha <\!\!-\!\!> x \,\varepsilon\, \beta)$

Ovaj se sekvent vrlo jednostavno dokazuje upotrebom pravila predikatskog računa i u očitoj je vezi sa 133, paradoksom formalne implikacije. Tako pomoću (P2) imamo

217 $(x)\neg(x \,\varepsilon\, \alpha), (x)\neg(x \,\varepsilon\, \beta) \vdash \alpha = \beta$.

S obzirom na 217, možemo govoriti o *odredenoj* praznoj klasi (the empty class), ili, kako se ona češće zove, *nula klasi* (the null class). Označićemo je sa 'Λ' i možemo je odrediti tako što ćemo utvrditi bilo koji uslov za koji znamo da nema ničeg što ga zadovoljava, kao recimo ne biti identičan sa sobom. Tako

$$\Lambda = \{x: x \neq x\}.$$

Nula klasa jeste klasa x, takva da x nije identično sa sobom. Pošto, kada je reč o logici, $(x)(x = x)$, pomoću (P1) je lako dokazati

218 $\vdash (x)\neg(x \varepsilon \Lambda)$

Presek klase sa svojim sopstvenim komplementom jeste prazan, kao što bismo mogli i očekivati. Tako možemo dokazati

219 $\vdash \alpha \cap \alpha' = '\Lambda.$

Pretpostavimo da $a \varepsilon \alpha \cap \alpha'$. Tada pomoću 205 $a \varepsilon \alpha$ & $a \varepsilon \alpha'$, odakle pomoću 209 $a \varepsilon \alpha$ $\neg(a \varepsilon \alpha)$, što je kontradikcija. Tako $(x)\neg(x \varepsilon \alpha \cap \alpha')$, pri čemu 219 sledi iz 217 i 218.

Komplement nula klase će očito biti klasa kojoj je *sve* član; tako za bilo koju datu interpretaciju u nekom univerzumu govora, to će biti klasa stvari koje su u tom univerzumu. Nju možemo zvati *univerzum klasa* (the universe class), označavajući je sa 'V', i određujući je kao

$$V = \{x: x = x\}$$

Tako je V klasa stvari koja sadrži njih same, a, pošto kada se radi o logici važi $(x)(x = x)$, na osnovu (P1) je lako dokazati

220 $\vdash (x)(x \varepsilon V).$

Trebalo bi da je očigledno da, s obzirom na (P2), bilo koje dve klase koje uključuju sve kao svoje članove jesu identične. Imamo tako

221 $(x)(x \varepsilon \alpha), (x)(x \varepsilon \beta) \vdash \alpha = \beta.$

Koristeći 220 i 221, možemo pokazati da je unija klase sa svojim komplementom, kao što bi smo i očekivali, univerzum klasa:

222 $\vdash \alpha \cup \alpha' = V.$

Značajna relacija koja može postojati između dve klase jeste *inkluzija*. Klasa α je *uključena* (included) u klasu β ako svi članovi α jesu članovi β. Tada pišemo '$\alpha \subset \beta$' i usvajamo definiciju

$$\text{Df. } \subset\text{: } \alpha \subset \beta <\!\!-\!\!> (x)(x \varepsilon \alpha -\!\!> x \varepsilon \beta)$$

Relacija inkluzije se mora pažljivo razlikovati od relacije članstva. Pretpostavimo da sam stanovnik Chelsea. Tada sam ja *član* klase stanovnika Chelsea. Dalje, pošto su svi stanovnici Chelsea stanovnici Londona, klasa stanovnika Chelsea je *uključena* u klasu stanovnika Londona, tako da sam ja takođe član i ove druge klase. Ali klasa stanovnika Chelsea nije *član* klase stanovnika Londona: da jeste, ona bi bila stanovnik Londona: ali

klase, za razliku od ljudi, nisu stanovnici nijednoga mesta. Opet, klasa ajkula je uključena u klasu sisara, ali nije član te klase, pošto, budući da je klasa, ona nije ajkula. Međutim, ako je Rufus ajkula, tada je član klase ajkula pa tako član klase sisara. Ali Rufus, pošto nije klasa, nije uključen u klasu sisara, barem ne više nego što sam ja, ako živim u Chelseaju, uključen u klasu stanovnika Londona, mada jesam član te klase.

Zbog toga se postavlja pitanje značaja razlikovanja objekata od njihovih jedinačnih klasa. Zato što sam ja član klase stanovnika Chelsea, tada je moja jedinačna klasa *uključena* u tu klasu, pošto su svi njeni članovi (u ovom slučaju je reč samo o jednoj), članovi te klase. Mi ovde zapravo imamo

223 $\vdash a \in \alpha \leftrightarrow \{a\} \subset \alpha$.

Objekat je član klase ako i samo ako je njegova jedinačna klasa uključena u tu klasu. Inkluzija je relacija između klasa: članstvo je (tipična) relacija između individue i klase[2].

Daleko uočljivija svojstva relacije inkluzije data su u sledećim teoremama, koje, uopšteno govoreći, slede neposredno iz njene definicije.

224 $\vdash \alpha \subset \alpha$;
225 $\vdash \alpha \subset \beta \; \& \; \beta \subset \gamma \rightarrow \alpha \subset \gamma$;
226 $\vdash \alpha \subset \beta \rightarrow \beta' \subset \alpha'$;
227 $\vdash \Lambda \subset \alpha$;
228 $\vdash \alpha \subset V$.

224-226 su, u izvesnom smislu, teoreme predikatskog računa zaogrnute prozirnim velom. Na primer, kada nije u skraćenom obliku, 224 je zapravo zakon identiteta $(x)(x \in \alpha \rightarrow x \in \alpha)$. Slično, 227 i 228 (nula klasa je uključena u bilo koju klasu, a bilo koja klasa je uključena u univerzum klasu) jesu analogije paradoksa formalne implikacije 133 i 132. One koje je teže dokazati jesu sledeće:

229 $\vdash \alpha \subset \beta \; \& \; \beta \subset \alpha \leftrightarrow \alpha = \beta$;
230 $\vdash \alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha \cup \beta = \beta$;
231 $\vdash \alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$.

---

2 Naravno, ne odbacujemo mogućnost klasa koje imaju klase kao svoje *članove*: zapravo, na višem nivou razvijenosti teorija klasa ne bi bila os velikog značaja kada ovakve klase ne bi bile dopuštene.

Za 231 dajem neformalni dokaz. Pretpostavi prvo $\alpha \subset \beta$, a neka je $a \varepsilon \alpha$. Tada očito $a \varepsilon \beta$, pa stoga $a \varepsilon \alpha \cap \beta$. Obrnuto, ako $a \varepsilon \alpha \cap \beta$, tada svakako $a \varepsilon \alpha$. Tako da $a \varepsilon \alpha \cap \beta$ ako i samo ako $a \varepsilon \alpha$, odakle je, na osnovu (P2) $\alpha \cap \beta = \alpha$. To dokazuje kondicional sa leva na desno. Pretpostavi sada $\alpha \cap \beta = \alpha$, a neka je $a \varepsilon \alpha$. Tada $a \varepsilon \alpha \cap \beta$, odakle $a \varepsilon \beta$. Tako je bilo koji član α i član β, pa zato $\alpha \subset \beta$. Ovo dokazuje kondicional s desna na levo i upotpunjuje dokaz za 231.

Neću dalje razvijati elementarnu teoriju klasa. Ali čitalac će bez sumnje razabrati mnoge analogije između ove teorije i iskaznog računa (uporedi, na primer, 231 sa tautologijom '(P –> Q) <–> (P & Q <–> P)'), a ukoliko želi on na osnovu ovoga poređenja može izraditi i dokazati druge teoreme za klase; ili može, što je probitačno, konsultovati Suppesa/25/. Zaključio bi radije jednom beleškom o nepoverenju. Zato što i pored toga što se može činiti da se naša teorija klasa dovoljno glatko nadovezala na intuitivno prihvatljive asumpcije, postoje izvesne teškoće koje se moraju prevazići ukoliko želimo da imamo konzistentan i upotrebljiv sistem.

Razmotri, prvo, prividno bezazlen rezultat 220, $(x)(x \varepsilon V)$. Da li da, kao posledicu dobijenu pomoću UE, dozvolimo $V \varepsilon V$? Ako je univerzum klasa ona klasa kojoj je *sve* član, kao što smo je definisali da jeste, da li ona predstavlja član same sebe? Možda bismo mogli dopustiti kao teoremu[3]; ali izvesno je da postoji nešto intuitivno neobično kada je reč o klasama koje sadrže sebe kao člana. Svakako, sve klase koje obično razmatramo *nisu* sopstveni članovi; na primer, klasa ajkula nije sama po sebi ajkula, klasa prirodnih brojeva nije sama po sebi prirodan broj. Pitanje koje se tiče toga da li postoje klase koje su sopstveni članovi navodi nas na to da razmotrimo *klasu* klasa koje nisu sopstveni članovi, ili, u našoj notaciji sa velikim zagradama

$$\{x: \neg(x \varepsilon x)\}$$

klasa objekata x takvih da x nije član samog sebe. Nazovimo ovu klasu R. Tada, kao što smo videli, većina klasa kojima obično baratamo, jesu članovi R.

---

[3] Kod Quinea /18/ je ovo teorema teorije klasa; ali u većini teorija klasa to nije prihvaćeno.

S obzirom na (P1), uslov za članstvo u R dat je bikondicionalom

(10) $a \varepsilon \{x: \neg(x \varepsilon x)\} <\!\!-\!\!> \neg(a \varepsilon a)$,

ili

(11) $a \varepsilon R <\!\!-\!\!> \neg(a \varepsilon a)$.

Ali (11) važi za proizvoljno *a*: kada se *a* uzme kao samo R, imamo

(12) $R \varepsilon R <\!\!-\!\!> \neg(R \varepsilon R)$.

(12) vodi neposredno u kontradikciju. Ovu kontradikciju je prvi uočio Russell, a paradoks dobijen razmatranjem klase onih klasa koje nisu sopstveni članovi poznat je kao *Russellov paradoks*.

Važno je istaći da implicitna kontradikcija (12) postignuta krajnje elementarnim rasudivanjem iz (P1). Nije preterivanje kada se kaže da sve moderne teorije klasa imaju kao svoju polaznu tačku odredeno rešenje za izbegavanje takvih paradoksa kao što je Russellov. Izlaz kojim je sam Russell nameravao da pred njim uzmakne suštinski se sastojao u tome da se takvi izrazi kao '*a* ε *a*' odbace kao ne dobro obrazovani, kao i da se razvije hijerarhija klasa i to na takav način da se za relaciju članstva jedino može reći da važi izmedu objekta na jednom nivou i klase koja je na sledećem nivou iznad. Odatle proistekla *teorija tipova* (theory of types) ima izvesnu prirodnost, ali je ona u praksi nezgrapna i njome se ne može spretno baratati. Druge teorije koje prihvataju '*a* ε *a*' kao dobro obrazovano (mada generalno lažno) i izbegavaju kontradikcije navodenjem dodatnih uslova sa desne strane od (P1). Neke druge teorije pak teže da izbegnu Russellov paradoks tako što dovode u pitanje asumpciju na kojoj počiva (P1) o tome da *svaki* predikat 'F' odreduje klasu {*x*: F*x*}. Medu logičarima još ne postoji opšta saglasnost oko toga koji je najbolji ili odgovarajući način izbegavanja Russellovog paradoksa. Ali jedna je stvar barem jasna: (P1) uprkos intuitivnoj privlačnosti i prividnoj samoočiglednosti, ne može se prihvatiti takvo kakvo je sada. A jedna od prednosti moderne simboličke logike sastoji se u tome što je upravo to pokazala. Takode se može izvesti filozofska pouka koja se tiče opasnosti prevelikog poverenja u stvari koje počivaju na intuiciji; ali ovo više nije mesto za te teme.

BIBLIOGRAFIJA

Bibliografija koja sledi veoma je probrana. Prvenstveno je namenjena kao polazišno mesto za onoga studenta koji želi da dublje zađe u logiku i neodlučan je odakle da krene. Zbog toga bi je trebalo koristiti u konjunkciji sa beleškama koje je slede, a koje naznačuju neke od mogućih pravaca kojima se čitalac sada može kretati. Ovde su pomenute samo knjige; bezmalo najveći broj tekućeg rada na logici pojavljuje se u okviru članaka u časopisima. Čitalac koji namerava da se u njih upusti trebalo bi da konsultuje *Journal of Symbolic Logic*, koji je 1936. počeo sa potpunom bibliografijom ranijih dela i od tada do danas je to održao u okviru periodičnih bibliografskih dodataka.

[1] BASON, A.H., i O'CONNOR, D.J., *Introduction to Logic* (2*nd* ed.), London, 1957.

[2] CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic*, I, Princeton, 1956.

[3] COPI, I.M., *Symbolic Logic*, New York, 1954.

[4] FITCH, F.B., *Symbolic Logic*, New York, 1951.

[5] FREGE, G., *The Foundations of Arithmetic* (translated by J.L. Austin), Oxford, 1950.

[6] FREGE, G., *Translations From the Philosophical Writings of Gottlob Frege* by Peter Geach and Max Black, Oxford, 1950.

[7] HILBERT, D., i ACKERMANN, W., *Principles of Mathematical Logic*, New York, 1950.

[8] JOSEPH, H.W.B., *An Introduction to Logic*, Oxford, 1906.

[9] KALISH, D., i MONTAGUE, R., *Logic: Techniques of Formal Reasoning*, New York, 1964.

[10] KLEENE, S.C., *Introduction to Metamathematics*, Princeton, 1952.

[11] KNEALE, WILLIAM i MARTHA, *The Development of Logic*, Oxford, 1962.

[12] LUKASIEWICZ, J., *Aristotle s Syllogistic* (2*nd* ed.), Oxford, 1957.

[13] MATES, B., *Stoic Logic*, Berkeley and Los Angeles, 1961.

[14] MATES, B., *Elementary Logic*, New York, 1965.

[15] MENDELSON, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1964.

[16] PRIOR, A.N., *Formal Logic*, (2nd ed.), Oxford, 1962.

[17] QUINE, W.V., *Methods of Logic*, New York, 1950.

[18] QUINE, W.V., *Mathematical Logic* (revised ed.), Cambridge, Mass., 1951.

[19] QUINE, W.V., *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Mass., 1963.

[20] ROSENBLOOM, P., *Elements of Mathematical Logic*, New York, 1950.

[21] RUSSELL, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919.

[22] STEBING, L.S., *A Moderm Introduction to Logic*, London, 1930.

[23] STRAWSON, P.E., *Introduction to Logical Theory*, London, 1952.

[24] SUPPES, P., *Introduction to Logic*, Princeton, 1957.

[25] SUPPES, P., *Axiomatic Set Theory*, Princeton, 1960.

[26] TARSKI, A., *Logic, Semantic, Methamatematics* (papers from 1923 to 1938, translated by J.H. Woodger), Oxford, 1956.

[27] WHITEHEAD, A.N., i RUSSELL, B., *Principia Mathematica*, vols. I-III, Cambridge, 1910-13; skraćena verzija teksta iz vol.I, Cambridge 1962.

Beleške

1. Studenti koji žele detaljnije da nastave da se bave ovim predmetom kao i metodama ove knjige trebalo bi da pokušaju sa [3], [4], [9], [14], [17], [24]. Veoma pristupačnim se čini [24] i u mnogim pogledima dobrim delom ide dalje nego što je dato u mojem pristupu; [4] je po upotrebljenim terminima najbliža aktuelnim pravilima derivacije. [3], [9] i [24] obiluju vežbama koje se mogu iskoristiti kao dodatak ovom kursu. U [17] je lepo obrađena provera pomoću istinosnih tablica, ali ja lično ne volim njena pravila za kvantifikatore. [9] je nova i veoma precizna, ali pomalo teška. [14] je veoma detaljno i lucidno razmatranje modernih tehnika u logici.

2. Studenti koje zanima iskazni račun sa drugačijeg stanovišta od ovog ovde pristupa (odnosno više pristup koji je aksiomatski nego pristup koji počiva na prirodnoj dedukciji) treba da konsultuju [1], [7], [16], ili, najbolju od svih, [2], koja predstavlja *veoma* obuhvatnu obradu, mada iziskuje i težak rad.

3. Studenti koje zanima predikatski račun sa drugačijeg stanovišta mogu pokušati sa [7], [14], [15], [18]. Obuhvatna obrada se nalazi, opet, u [2].

4. Za tradicionalnu logiku, ako želiš da budeš široko obavešten, koristi [8], [22] ako ti se žuri, a [12] ako želiš da budeš u toku događaja i (uglavnom) tačno obavešten. [13] je izvrsno sagledavanje logike Stoika, koji su anticipirali mnoge aspekte kako iskaznog računa tako i Fregeovih filozofskih teorija.

5. Istorija logike je verovatno najbolje izučena u [11]; [12] i [13] obrazuju korisne dopune o antičkoj logici, a zanimljivi istorijski komentari se mogu pronaći u okviru [16]. [5] i [27] (posebno uvodna poglavlja) predstavljaju savremenu klasiku.

6. Oni koji se zanimaju za probleme u vezi sa formalnom logikom trebalo bi da čitaju [5], [6], [21] i [23]. Prvo poglavlje (Poglavlje 0) iz [2] zaslužuje da se pročita nekoliko puta od strane *svih* filozofa.

7. Za teoriju klasa počni sa [25]; posle toga pređi na [18] i [19]. Tu se mogu naći uputstva za dalje izučavanje.

8. Za ostale aspekte logike na višem nivou [10] je nezaobilazno, ali teško za one koji nemaju matematičko predznanje. [15] je takođe korisno - u mnogim pogledima

savremenije od [10], ali manje pouzdano i *veoma* kondenzovano ([10] takođe sadrži dobro poglavlje o teoriji klasa). [20] prelazi veliki put na tek nekoliko stranica, ali je primerenije matematičarima nego filozofima. [26] pruža izvrsnu ideju o radu koji se odvijao na logici u toku između dva rata, a mnogi od članaka u njoj predstavljaju kamenove-temeljce za ono što predstavlja savremeni rad. Za neke zanimljive ali uzgredne stvari u modernoj logici (polivalentnu logiku, modalnu logiku) počni sa [16], koja ima korisnu bibliografiju za dalje čitanje.

9. Ako ovoj stvari prilaziš ozbiljno, neophodno ti je, više nego išta, [2] i [10]. Ako ti se čini da su matematički dokazi teški, pokušaj sa promenom tempa - pročitaj ih sporije i nekoliko puta, isprva letimično, a nakon toga čitajući rečenicu sve dotle dok nisi *siguran* da si je razumeo. Ako ti to može pomoći za utehu, imaj u vidu da se ona isto tako čini teškom i *profesionalnim matematičarima*. Dobar dokaz može predstavljati isto onako veliko zadovoljstvo kakvo za entuzijaste predstavlja profesionalna partija šaha, a to isto bi trebalo da važi i kada se radi o fragmentima intelektualne istorije: zato nemoj žuriti.

10. Logički tekstovi pokazuju veliku raznolikost različitih simbola za iste operacije i postoji malo nade u bilo kakvu nagoveštavajuću jednoobraznost. To je nešto sa čim treba da naviknemo da živimo.

Indeks

PRILOZI

A. N. Prior: MODALNA LOGIKA
A. N. Prior: POLIVALENTNA LOGIKA
A. N. Prior: DEONTIČKA LOGIKA
John van Heijenoort: LOGIČKI PARADOKSI
Boruch A. Brody: GLOSAR LOGIČKIH TERMINA

A. N. Prior

MODALNA LOGIKA

Modalna logika izučava logička svojstva nužnosti, mogućnosti, nemogućnosti, kao i drugih srodnih pojmova. Ona je ekstenzivno obrađena kod Aristotela i drugih pisaca antike. Nakon što je hrišćanstvo prvo osvojilo svet antike, čini se da je modalna logika bila shvaćena kao teološki opasan deo grčke filozofije, ali je ona nanovo ekstenzivno izučavana od strane Arapa, kao i od strane hrišćanskih sholastika. Nakon Renesanse, ona se ili prikazivala samo u grubim crtama, ili pak sasvim zanemarivala. Modalna logika našla je vrlo malo prostora u okviru moderne matematičke logike devetnaestog i sa početka dvadesetog veka, ali je od ranih 1930-tih postalo rasprostranjeno oživljavanje zanimanja za nju, dok sada predstavlja jednu od najzapaženije razvijenih grana logike.

Osnovni pojmovi modalne logike prevashodno se izražavaju pomoću određenih prideva, pomoćnih glagola i glagolskih fraza - mogućnost pomoću takvog oblika kao što je 'Moguće *p*', 'Moguće je da *p*', 'Moglo bi biti da *p*'; nužnost pomoću 'Nužno *p*', 'Nužno je (nužno istinito) da *p*', 'Nesumnjivo je da je slučaj da *p*', 'Mora biti da *p*'. Ove reči i fraze mogu se kombinovati na različite načine sa drugim rečima i frazama istog tipa - na primer sa onima koji izražavaju negaciju - a ekvivalencije i implikacije koje važe između ovih sklopova među prvim su uočenim zakonima o ovom predmetu. Posebno, imamo sledeće zakone modalne 'ekvipolencije':

(1) Nužno je da *p* = nemoguće je da ne-*p* = nije moguće da ne-*p*.
(2) Nužno je da ne-*p* = nemoguće je da *p* = nije moguće da *p*.
(3) Nije nužno da *p* = nije nemoguće da ne-*p* = moguće je da ne-*p*.
(4) Nije nužno da ne-*p* = nije nemoguće da ne-*p* = moguće je da *p*.

Od navedenih, forme (2) impliciraju forme (3), a forme (1) impliciraju forme (4), mada ne i vice versa. Takođe, forme (1) impliciraju da je *p* istinito ('Ako nužno *p* onda *p*', ili, kao što su to sholastici sročili *ab opotere esse ad esse valet consequentia*, "od 'mora biti tako' na 'jeste tako' čini zaključak validnim"); forme (2) impliciraju da je *p* lažno ('Ako *p* nije moguće, onda ne-*p*'); forme (3) su posledice toga da je *p* lažno ('Ako ne-*p* onda ne nužno *p*'); a forme (4) su posledice toga da je *p* istinito ('Ako *p* onda moguće *p*', *ab esse ad posse valet consequentia*).

Kod kombinovanja nužnosti sa implikacijom mora se napraviti razlika između implikacije da je nešto nužno (*necessitas consequentis*, koja je izražena pomoću 'Ako *p* onda sledi nužno-*q*') i nužnosti implikacije kao celine (*necessitas consequetiae*, koja je izražena pomoću 'Ako *p* onda-nužno sledi *q*' ili, što je manje dvosmisleno, pomoću 'Nužno ako-*p*-onda-*q*'). Na primer, iskaz ne implicira u svim slučajevima svoju sopstvenu nužnost (nemamo u svakom slučaju 'Ako *p* onda nužno-*p*'), dok svaki iskaz nužno implicira samog sebe (imamo 'Nužno ako-*p*-onda-*p*').

Međutim, poznato je barem još od Aristotelovog vremena da ono što nužno proizilazi iz nužnog iskaza jeste i samo nužno: Ako je nužno ako *p* onda *q*, onda, ako nužno *p* onda nužno *q*. Slično, ono što nužno proizlazi iz nečeg mogućeg jeste i samo moguće: Ako je nužno ako *p* onda *q*, onda, ako je moguće *p* onda moguće *q*. Konverzno, što god da implicira nemoguć iskaz jeste i samo nemoguće.

Kada je nužnost kombinovana sa disjunkcijom (tj. sa 'Ili ... ili...') moramo praviti razliku između one nužnosti koja se tiče disjunkcije ('Nužno je ili *p* ili *q*') i one koja se tiče disjunkata ('Ili nužno *p* ili nužno *q*'). Na primer, imamo nužno 'Ili *p* ili ne-*p*', mada ne moramo imati ni 'Nužno *p*', niti 'Nužno ne-*p*'. Gde ni dat iskaz ni njegova negacija nije nužno - to jest, gde iskaz nije ni nužan niti nemoguć - kaže se da je to kontigentno.

Konjunkcija (izražena pomoću 'i') dve različite tvrdnje o mogućnosti na sličan način treba razlikovati od tvrdnje da je cela konjunkcija moguća: 'Moguće *p* i moguće *q*' ne implicira 'Moguće (*p* i *q*)'. Na primer, i *p* i ne-*p* mogu zasebno biti mogući (što će i biti slučaj ako je *p* kontingentno), dok to nije slučaj sa kombinacijom '*p* i ne-*p*'. Tamo gde iskazi nisu zajedno mogući, bilo da to jesu ili nisu zasebno, za njih se kaže da su inkonzistentni ili inkompatibilni; tamo gde su zajedno mogući, oni su konzistentni ili kompatibilni.

Među kontingentnim iskazima jedni su bliži nužnosti od drugih; tada se za njih kaže da imaju više izgleda, ili da su verovatni. Račun verovatnoće se može shvatiti kao metričko proširenje modalne logike, kao što se modalne tvrdnje mogu shvatiti i kao posebni slučajevi koji se pojavljuju u logici verovatnoće (Moguće *p* = Postoje izgledi da *p*, Nužno *p* = Nema izgleda da ne-*p*). Međutim, mi se nećemo dalje baviti ovim proširenjem modalne logike.

Materijalna implikacija, striktna implikacija i sled

U antičkom, srednjovekovnom i modernom periodu modalni pojmovi su bili razmatrani kako bi se objasnio ´sled´ jednog iskaza iz drugog koji, izražen u kondicionalnom obliku, glasi ´Ako *p* onda *q*´.

U četvrtom veku p.n.e. Filon iz Megare je uočio da se istinitost i lažnost može razdeliti između dva iskaza na četiri načina: ili će oba biti istinita, ili prvi istinit a drugi lažan, ili obrnuto, ili će oba lažna. Filon je predložio da je oblik ´Ako *p* onda *q*´ istinit u svim slučajevima sem u drugom; to jest, da je istinit sve dok nemamo slučaj da je *p* istinito a *q* lažno. Nema sumnje da je ´Ako *p* onda *q*´ lažno ako je *p* istinito a *q* nije, niti da bi to u svakom od preostalih slučajeva moglo biti istinito (što je u velikoj meri uvidao i Aristotel), ali da je ovo automatski istinito i za preostale slučajeve u Filonovo je vreme bilo u velikoj meri izloženo sumnji, što je takođe bilo dovedeno u pitanje i onda kada je, od strane logičara devetnaestog i dvadesetog veka, uveden pojam materijalne implikacije, čija je definicija suštinski filonovska. Zapravo, savremena modalna logika počinje sa C.I. Lewisovim pokušajem da ispita filonovsku definiciju reči ´ako´.

Teškoća sa filonovskom definicijom se sastoji u tome da ona čini bilo koji kondicional automatski istinitim ukoliko on ima lažni antecedent *p*, ili istinit konsekvent *q* (zbog toga što ni u jednom od ovih slučajeva nećemo imati kombinaciju *p* sa lažnim *q*). Lewis je predložio da *p* neposredno, ili ´striktno´, implicira *q* jedino onda kada ne samo ako se nije dogodilo da bude slučaj da je *p* istinito a *q* lažno, već i ako ne bi moglo da se dogodi da je *p* istinito a *q* lažno. To jest, ´*p* striktno implicira *q*´ obuhvata ne samo ´Ne (*p* i ne-*q*)´, već i ´Nije moguće da (*p* i ne-*q*) - a što je simbolizovano kao $p \quad q : = : \sim\Diamond(p \,.\, \neg q)$. Ovu definiciju relacije ´konsekvencije´ su najčešće davali srednjovekovni pisci, koji su

takođe dolazili do ove filonovske koncepcije kao posebnog slučaja. Ako kombinacija *p* i ne-*q* nije ostvarena u nekom određenom momentu, onda u tom momentu nije ni moguće da bi ona to i mogla biti, tako da u tom momentu, mada ne i uvek, kondicional 'Ako *p* onda *q*' u ovom smislu važi; to je, kako oni to kažu, validna *consequentia ut nunc*.

Srednjovekovni logičari takođe su zapazili, kao što je to učinio i Lewis, da 'striktna' implikacija ima svoje sopstvene paradokse. Lažnost *p* nije dovoljna da bi se potvrdio striktni kondicional 'Ako *p* onda *q*', ali njegova nemogućnost jeste, zato što ako *p* ne može biti sasvim istinito tada nemamo niti možemo imati kombinaciju istinitosti *p* sa lažnošću *q*. Slično tome, mada istina *q* nije dovoljna da bi potvrdili striktno 'Ako *p* onda *q*', njegova nužnost jeste, zato što ako *q* ne može sasvim biti lažno tada nemamo, niti možemo imati, kombinaciju lažnog *q* sa istinitim *p*. Na osnovu ovih rezultata sledi da sve nemogućnosti striktno impliciraju jedne druge - tj., da su 'striktno ekvivalentne' - što je slično i sa svim nužnostima.

Lewis je ove rezultate shvatio naprosto kao otkrića (zbog čega ne bi i u logici bilo iznenađenja kao i u drugim granama matematike?), ali za mnoge logičare oni pokazuju da striktna implikacija ne može ispravno pružiti smisao reči 'ako' u kojem 'Ako *p* onda *q*' znači da *q* logički sledi iz *p*. Na primer, oni su tvrdili da ako svaka nužna istina sledi iz svih iskaza ma šta da su oni, pažljivi dokazi nužnih istina, kakvi su predstavljeni u takvim disciplinama kao što je geometrija, ne bi bili nužni, a pokušaji stvaralaca logičkih sistema da pokažu da su njihovi aksiomi 'nezavisni' (tj., da nijedan od njih ne sledi iz ostalih) bili bi osuđeni kao promašaji. Međutim, tu postoji izvesna neodređenost. Kada se pokaže da je neki skup aksioma 'nezavisan', tom prilikom se zapravo uvek pokaže da nijedan aksiom nije derivabilan iz drugih na osnovu izvesnih određenih pravila derivacije; nezavisnost je povezana sa pravilima koja su izabrana. Striktna implikacija tiče se pre onoga što čini pravila derivacije opravdanim, validnim, ili 'bezbednim', u tom smislu da nas ono ne može zavesti od istinitosti na lažnost, kao i da nas nijedno pravilo ne može od istine navesti na lažnost, bilo da polazi od onoga što je nužno lažno ili vodi ka onome što je nužno istinito. Štaviše, čak i ako upotrebljavamo pravila koja bi nam zaista onemogućila da dokažemo sve naše teoreme (kao nužne istine) iz bilo kojih da su

proizvoljno izabranih premisa (a sada postoji mnogo logičkih sistema koji su konstruisani baš na tom principu), još uvek ostaje da se pokaže da dati iskaz jeste takva nužna istina na taj način što će se to i dokazati. Oni logičari koji drže, iz dobrih ili rdavih namera, da kada *p* striktno implicira *q* to nije isto što i kada *q* logički sledi iz *p*, opisuju ove potonje tako (nadovezujući se na G.E. Moorea) što kažu da *p* povlači (entailing) *q*. E.J. Nelson je tvrdio da povlačenje u ovom smislu mora da izražava unutrašnju vezu između iskaza koje povezuje, značaj koji jedan ima u odnosu na drugi, te da ono ne može važiti usvajajuci samo neka od svojstava (lažnost ili istinu, ili nemogućnost ili nužnost) koje neki od iskaza sami za sebe mogu posedovati. On je predložio da '*p* povlači *q*' bude određeno kao '*p* je inkonzistentno sa pobijanjem *q*', pri čemu je 'inkonzistencija' ponovo shvaćena kao relacija za koju su neophodna oba iskaza, a ne samo nemogućnost njihove istovremene istinitosti (zato što bi ovo potonje sledilo iz nemogućnosti bilo kojeg od njih te bi na taj način Nelsonovu definiciju učinilo ekvivalentnom Lewisovom).

Oni koji prigovaraju poistovećivanju povlačenja sa striktnom implikacijom nisu obavezni da pruže alternativnu definiciju pojma kojoj bi sami bili skloniji, zato što povlačenje sasvim dobro može biti pre neki od onih nedefinisanih pojmova pomoću kojih odredujemo druge stvari nego što bi to obrnuto bilo slučaj. Medutim, oni ipak imaju obavezu da, što je moguće sistematičnije, postave zakone za koje drže da im je povlačenje podredeno, tako da možemo da budemo u stanju da otkrijemo da li oni, takode, imaju 'paradoksalna' svojstva, kao i da ih sagledamo kakva su. Jedini ozbiljni pokušaji da se ovo učini vezani su za Wilhelma Ackermana, koji je 1956. pružio postulate za ono što nazivamo 'strogom' ili 'rigoroznom' implikacijom, kao i A.R. Andersona i N.D. Belnapa, koji su se bavili modifikacijom Ackermanove koncepcije. Njihov sistem zadovoljava Nelsonov zahtev za 'relevancijom', u sasvim doslovnom smislu, tako da on ne pruža nijedan zakon povlačenja, osim onih u kojima povlačenje i forme sa povlačenjem imaju barem jednu zajedničku varijablu. Na primer, zakon je da za bilo koje *p* i *q*, *p*-i-*q* povlači *p* (ovde je *p* zajedničko i za antecedent i za konsekvent), ali ne i da za bilo koje *p* i *q*, *p*-i-ne-*p* povlači *q* (gde se jedna konsekvent-varijabla *q* ne pojavljuje u antecedentu). Za posebno izabrane *q* drugi zakon ne važi; na primer, *p*-i-ne-*p* povlači *p* važi, zato što proishodi i na osnovu prvog zakona.

Ko god da pred sebe postavi zadatak 'formalizovanja' povlačenja mora se suočiti sa sledećom teškoćom, koju su zapazili i srednjovekovni logičari kao i, nezavisno od njih, sam Lewis. Ako 'Ako *p* onda *q*' koristimo da bismo izrazili povlačenje *q* od strane *p* sledeći zakoni izgledaće opravdani:

(1) Ako (ako *p* onda *q*) onda ako (ako *q* onda *r*) onda (ako *p* onda *r*).
(2) Ako (*p* i *r*) onda ((ili *p* ili *q*) i *r*).
(3) Ako (ili *p* ili *q*) i ne-*p*, onda *q*.

Ovde (1) izražava 'tranzitivnost' povlačenja, koja se pretpostavlja kada od jednog iskaza imamo lanac dokaza koji vodi do drugog. Načelo (3) jeste ono za koje su stoički logičari govorili da ga čak i psi na ulici znaju: loveći svoj plen sve do mesta gde se put račva oni će njušiti duž jedne račve, a ako tamo ne nanjuše nikakav trag onda će duž druge loviti bez njušenja. Ali na osnovu (2) nemoguć iskaz '*p* i ne-*p*' povlači '(ili *p* ili *q*) i ne-*p*', u kojem je *q* koji god hoćete iskaz; ovo, na osnovu (3), povlači čisto *q*, stoga, na osnovu (1), nemoguć iskaz '*p* i ne-*p*' povlači *q*, koje može biti bilo koji iskaz. Ovaj poslednji 'paradoks' možemo izbeći jedino tako što ćemo pobijati (1), (2) i (3), a ta pobijanja čine se podjednako 'paradoksalnim' kao i ono što pokušavamo da izbegnemo.

Anderson-Belnapov sistem, koji ima izvesnu formalnu eleganciju, pokušava da zaobide zakon (3). Intuitivno bi mnogo plauzibilnije bilo pobijanje (1), mada ova sugestija nije sasvim sistematično razvijena. Pretpostavimo da kažemo da *p* povlači *q* ako i samo ako (a) *p* striktno implicira *q* i (b), da ga ono zaista povlači s obzirom na 'prihvatljivo' opšte načelo, takvo za koje se mogu naći slučajevi u kojima iskaz koji povlači nije nemoguć, dok iskaz koji je posledica povlačenja nije nužan. Tada će '*p* i ne-*p*', s obzirom na prihvatljivo načelo (2), povlačiti 'Ili *p* ili *q*, i ne-*p*', a ovo će, s obzirom na prihvatljivo načelo (3), povlačiti čisto *q*. Medutim, kada bi povlačenje bilo tranzitivno tada bismo imali da '*p* i ne-*p*' povlači *q*, i ne postoji 'prihvatljivo' načelo kojim bi se ovo moglo predstaviti.

Neki su pisci predložili ograničenje termina relacije povlačenja na kontingentne iskaze, tako da gde god je *p* ili *q* ili nužno ili nemoguće, '*p* povlači *q*' je ili lažno (prema jednoj verziji ovoga gledišta), ili besmisleno (prema drugoj). Bilo bi u svakom

slučaju veoma teško izložiti bilo koji tako ograničen zakon za povlačenje, a to bi takođe isključivalo i onu vrstu povlačenja koja je upotrebljena kada smo tvrdili da je neki iskaz nemoguć zato što on povlači nešto nemoguće.

Sistemi striktne implikacije

Za različite alternativne skupove aksioma i pravila za mogućnost, nužnost i striktnu implikaciju koje je pružio Lewis on je, zajedno sa drugima, pokazao da oni nisu ekvivalentni - tj. da nemaju iste formule kao teoreme. Zbog toga su im pridodati brojevi - *S1*, *S2*, *S3*, *S4*, *S5*, *S6*, *S7* i *S8*. Mnoge alternativne aksiome i pravila pružili su kasniji logičari, a razvijeni su i drugi sistemi koji nisu ekvivalentni nekom od Lewisovih. Jedan, koji je posebno jednostavan, a koji je Robert Feys nazvao sistem *T*, suštinski potiče od Kurta Gödela. On pretpostavlja uobičajene zakone za materijalnu implikaciju i negaciju, zajedno sa pravilom da ako je *X* zakon i 'Ako *X* onda *Y*' ('ako' je ovde 'ako' materijalne implikacije) takođe jeste zakon, onda je i *Y* zakon; on sadrži neodređen simbol za 'nužno', određuje 'Moguće *p*' kao 'Nije nužno ne-*p*', a '*p* striktno implicira *q*' kao 'Nužno (ako *p* onda *q*)' ('ako' je ovde 'ako' materijalne implikacije, kao i kod aksioma). Posebni aksiomi za nužnost su jednostavni

(1) Ako nužno *p* onda *p*, = A5 : $Lp \supset p$

(2) Ako nužno (ako *p* onda *q*), onda ako nužno *p*, onda nužno *q*. = AG : $L(p \supset g) \supset (Lp \supset Lg)$

Postoji posebno pravilo, 'pravilo necesitacije', da ako je formula *X* zakon tog sistema, onda je to i 'Nužno *X*'. Sva elementarna modalna načela koja su izložena u prvom odeljku ovoga članka, kao i paradoksi striktne implikacije, u ovom se sistemu mogu izvesti kao teoreme.

G.H. von Wright je razvio sistem koji je ekvivalentan sa *T*, nazivajući ga *M*. U *M* neodređen modalni izraz predstavlja 'moguće', 'Nužno *p*' je određeno kao 'Nije moguće ne-*p*'. Ovaj postupak je prisutan i u Lewisovim sistemima, ali mogući su i drugi postupci. Na primer, kao neodređena može se uzeti sama striktna implikacija, a 'Nužno *p*' može se odrediti kao 'Ne-*p* striktno implicira *p*' (što god da je posledica striktne implikacije čiji je antecedent njegova negacija jeste nužno istinito, a što god

jeste nužno istinito - jeste striktna posledica sopstvene negacije, pošto je bilo šta striktno implicira). U nekim strožijim Lewisovim sistemima (*S4* i *S5* - njihova karakteristična svojstva će biti kasnije skicirana) 'Nužno *p*' se može odrediti kao '*p* striktno implicira *p*, što striktno implicira *p*' (što god da za sobom implicira nužnu istinu, kao u slučaju kada to striktno implicira sebe, jeste i samo nužno, a što god da je nužno jeste striktna posledica bilo koje nužne istine, pošto je posledica striktne implikacije bilo čega). Tada je moguće razlikovati one zakone u kojima striktna implikacija nije jedini logički pojam koji se pojavljuje. Oni su različiti za različite Lewisove sisteme, a potpuni sistemi se mogu dobiti iz čistih fragmenata striktne implikacije dodavanjem odgovarajućih aksioma (istih za sve te sisteme) za 'i' i 'ne' (E.J. Lemmon), ili za 'i', 'ili' i 'ne' (Ian Hacking), ili za materijalno 'ako' i standardan nemoguć iskaz (C.A. Meredith). Koristeći ovaj poslednji postupak možemo pružiti formalno otelovljenje koncepcije materijalne implikacije, kao graničnog slučaja striktne implikacije, ideje kojoj je bio sklon C.S. Peirce, a za koju smo ranije napomenuli da se pojavljuje i u srednjovekovnim spisima. Peirce je rekao da generalno kondicionalna forma 'Ako *p* onda *q*' znači da ni u jednom mogućem stanju stvari *p* nije istinito bez *q*, ali mi možemo uzeti u razmatranje širi ili uži obim mogućih stanja stvari, tako da ako uži obim svedemo na aktualno stanje stvari naše 'ako' postaje materijalno.

Lewisovi sistemi *S1* i *S2* su slabiji od sistema *T*; njegovi *S3*, *S6*, *S7* i *S8* sadrže zakone koje *T* nema, ali im nedostaju neki koje ovaj ima (na primer, nemaju pravilo necesitacije), dok njegovi *S4* i *S5* sadrže *T*, dodajući mu izvesna načela koja se tiču ponovljenih (iteriranih) i pridatih modalnosti - to jest koja se tiču moguće mogućeg, nužno nužnog, moguće nužnog i nužno mogućeg. Može se ustanoviti da kada i nije sve aktualno moguće, da bi ono sve u svemu moglo biti moguće; ovo je shvatanje stvari koje je utelovljeno u *S6*, *S7* i *S8*. Alternativno, može se smatrati da jedino ono što je aktualno moguće može biti moguće - to jest, da za bilo koje *p*, ako moguće da moguće *p* onda moguće *p*. Ako je tako, ovo će proizilaziti na osnovu uobičajenog načela da što je god aktualno nužno jeste nužno da je nužno. Ovo su zakoni koji odlikuju sistem *S4*. Može se dalje uzeti da što god je moguće jeste nužno moguće, a što god bi moglo biti nužno jeste aktualno nužno. Ova su načela položena u *S5*, a pronađeno je da načela

S4 slede iz onih u *S5* na osnovu uobičajenih modalnih zakona, ali ne i obrnuto. U *S5*, mada ima prostora i za kontingentne iskaze, kao što ga ima i za nužne i nemoguće, nijedna tvrdnja o modalnosti iskaza nije kontingentna, pošto bilo koji stav po kojem je iskaz nužan ili nemoguć jeste nužno istinit ako je uopšte istinit, a nužno lažan ako je lažan.

Čisti fragmenti striktne implikacije u *S4* i *S5* povezani su međusobno na veoma sličan način na koji su fragmenti sa implikacijom u intuicionističkoj logici povezani sa ´klasičnom´ istinosno-funkcijskom logikom, a slične analogije među sistemima postoje i u njihovoj opštoj izgrađenosti. Nedavno je bilo izvesnih ispitivanja sistema koji sadrže *S4*, koji su sadržani u *S5*, a koja su pokazala paralelnost sa sistemima između intuicionističke i iskazne logike. Jednog od takvih sistema dotaći ćemo se u sledećem odeljku. Takođe je moguće, mada donekle teško, dati formalni izraz ne tako retkom stanovištu da pridodati modalni izrazi, kao što je ´moguće da moguće´, nemaju smisao.

Interpretacija modalnih sistema

Raznolikost alternativnih sistema modalnih zakona koje logičari danas pružaju sugeriše da postoji izvesna nejasnoća u značenju osnovnih termina ´moguće´ i ´nužno´, te da različiti zakoni, među kojima su i oni koji su ovde prikazani, mogu pouzdano važiti i onda kada su im data međusobno različita precizna značenja.

Na primer, možemo uzeti da je moguće ono što ili jeste, ili je bilo, ili će biti istinito, a nužno kao ono što jeste i uvek je bilo i uvek će biti istinito. Pokazuje se da, shodno uobičajenim gledištima koja se odnose na prošlu i buduću istinu, ova interpretacija potvrđuje *S5*. Na primer, ´što god da može biti nužno jeste aktualno nužno´ biće shvaćeno kao ´Ako jeste, ili je bilo, ili će biti istinito da nešto jeste i da je uvek je bilo i da će uvek biti slučaj, tada je baš sada istinito da ta stvar jeste i da je uvek bila i da će uvek biti slučaj´, i da je to istinito.

Interpretaciju modalnih termina ovog opšteg tipa dao je grčki logičar Diodor Kronus; međutim, on je izneo stanovište samo o sadašnjosti i budućnosti - to jest, odredio je moguće kao ono što jeste ili će biti istinito, a nužno kao ono što je istinito i što će to uvek biti. Ovo ne potvrđuje sva *S5* načela. Na primer, nije uvek

istinito da ako nešto jeste ili će biti istinito da nešto jeste i da će uvek biti slučaj, tada je baš sada istinito da ta stvar jeste i da će uvek biti slučaj (ona ne može svoje trajanje započeti kasnije); to jest, u diodorovskoj modalnoj logici nije istinito da što god je moguće da je nužno jeste aktualno nužno. Međutim, diodorovska logika sadrži zakon iz *S4* da što god je aktualno nužno jeste nužno da je nužno, zato što ako jeste i uvek će biti istinito da *p*, tada ono samo jeste i uvek će biti istinito. Međutim, diodorovska modalna logika nije sasvim istovetna sa *S4*, pošto sadrži izvesne zakone koji nisu u tom sistemu (mada jesu u *S5*) - na primer, zakon da što god bi moglo biti nužno mora biti moguće (to jest, ako jeste ili će biti da jeste i uvek će biti da *p*, tada jeste i uvek će biti da jeste ili će biti da *p*). Zapravo, diodorovski sistem leži između *S4* i *S5*.

S4 dobijamo dosledno tako što pretpostavimo da budućnost nije sasvim fiksirana i da bilo koje stanje stvari ima brojne alternativne budućnosti koje iz njega mogu proisteći (mada je prekasno da, kada neko stanje postane sadašnje, ima alternativne prošlosti), a zatim odredimo 'Moguće *p*' kao *p* je ili sada istinito, ili će biti istinito barem u jednoj od alternativnih budućnosti' i 'Nužno *p*' kao '*p* je istinito sada kao i tokom svih alternativnih budućnosti'.

Interpretacije ovoga tipa brilijantno su uopštili Stig Kanger (*Probability in Logic*, Stockholm, 1957), Jaakko Hintikka, a posebno S.A. Kripke. Pretpostavimo da smo se opremili skupom 'svetova' (sa stanovišta apstraktne matematike, 'svet' može biti jednostavno neki skup iskaza); možemo odrediti moguće kao ono što je istinito ili u aktualnom svetu ili u nekom svetu koji iz ovoga proishodi, a nužno kao ono što je istinito, kako u aktualnom svetu tako i u svim svetovima koji proishode iz njega (ili apstraktnije rečeno, u svim svetovima sa kojima ovaj svet stoji u izvesnoj relaciji *R*). Tada dobijamo različite modalne sisteme na taj način što obrazujemo različite asumpcije (pretpostavke) o relaciji proishođenja (accesibility, odnosno *R*), a na osnovu različitih interpretacija ove relacije biće prihvatljive i različite takve asumpcije. Na primer, možemo jednostavno pretpostaviti da je ta relacija tranzitivna - tj. da ono što može proisteći iz bilo kojeg sveta koji je proistekao iz nekog datog sveta proishodi i samo iz ovog datog sveta. Naša poslednja prethodno data interpretacija, kada je data u terminima alternativnih mogućih budućnosti, predstavlja poseban slučaj ove vrste (moguća

buduća posledica moguće buduće posledice datog stanja stvari će i samo biti moguća buduća posledica tog stanja stvari); to nam pruža *S4*. Ili možemo pretpostaviti da je proishođenje simetrično - tj. da ako bilo koji svet *A* proishodi iz sveta *B*, tada i *B* proishodi iz *A*. Ovo vodi modalnom sistemu koji se nalazi između *T* i *S5*, a koji sadrži zakon (kojeg nema u *S4*) da što god je moguće da je moguće jeste i aktualno tako. Ako pretpostavimo i simetriju i tranzitivnost - što su uslovi koji bi bili ostvareni kada bi svaki svet mogao da proishodi iz svakog drugog i da ujedno nijedan svet ne proishodi iz bilo kojeg drugog - imali bismo *S5*. Ako pretpostavimo da je svaki svet ´povezan´ (connected) proishođenjem sa svakim drugim - tj. da za bilo koji svet *A* i *B* ili *A* proishodi iz *B* ili obrnuto - dobijamo sledeći sistem koji stoji između *T* i *S5*. Takva bi povezanost bila jedno od svojstava diodorovskog sistema, zbog toga što kada su data bilo koja dva trenutna stanja stvari ili je *A* aktualna buduća posledica *B* ili je *B* neko takvo koje proishodi iz *A*. Tamo gde je proishođenje određeno terminima alternativnih mogućih budućnosti nemamo takvu povezanost, pošto se *A* može zadesiti na jednoj grani a *B* na drugoj, a da pri tome nijedno od njih nije moguća posledica ovog drugog.

Sintaksičke interpretacije modalnosti

Takođe su načinjeni i pokušaji da se pruži ´sintaksička´ interpretacija modalnih pojmova, da nužnost *p*-a bude izjednačena sa mogućnošću njegovog dokazivanja na osnovu određenih aksioma putem određenih pravila. Naravno, takva nužnost bi uvek bila u zavisnosti od izabranih pravila i aksioma, dok najdirektniji način da se razvije ovaj tip interpretacije iziskuje tanane promene u gramatici modalnih izraza. U sistemu kakav je Lewisov ´nužno´ predstavlja prilog, kao što je to i ´ne´, koji je dodat rečenicama da bi se obrazovale nove rečenice, a striktno ´ako´ jeste ´veznik´ koji vezuje dve rečenice da bi se od njih obrazovala složena rečenica. Složene se rečenice u svakom slučaju ne tiču njihovih komponenti, već onoga na šta se odnose njihove komponente. ´Slepac je nužno čovek´ tiče se ljudi, ne rečenica, čak ne ni takve rečenice kao što je ´Slepac je čovek´, a ´Cezar je osvojio Gale striktno implicira i ´Cezar je osvojio nešto´ tiče se Cezara, Gala, itd., a ne rečenica ´Cezar je osvojio Gale´ i ´Cezar

je osvojio nešto'. Mi smo, zapravo, u toku dosadašnjeg izlaganja vrlo slobodno upotrebljavali oblike kao što su "'Trava je zelena' striktno implicira 'Trava ima boju'", '*p* implicira *q*', '*p* je nužno' (tako što su '*p*' i '*q*' predstavljali rečenice a ne imenice), i nastavićemo to da činimo i dalje. Ali kada se ima u vidu striktno svojstvo onda ga treba zapisati kao 'To *p* je nužno' (tj. 'Nužno je da *p*') i 'To *p* implicira (ili povlači za sobom) da *q*'. Nužnost rečenica, kao i kada rečenice impliciraju rečenice, jeste sekundarni oblik koji bi lako mogao da se odredi u terminima primarnog oblika - na primer tako što će se reći da je rečenica 'Trava je zelena' nužna ako i samo ako je 'Trava je nužno zelena' istinito.

Međutim, na osnovu interpretacije modalnosti koja je sada utvrđena, ono što je primarno jeste glagol 'jeste nužno', koji obrazuje rečenice ne od rečenica već od izraza koji imenuju rečenice, a čiji rezultat jeste neka rečenica koja se zapravo tiče one rečenice koja je bila imenovana; bilo koja druga upotreba izraza 'nužno', ukoliko se uopšte dogodi, određena je terminima ove upotrebe. Takva se upotreba modalnih reči može učiniti preciznom samo onda ako se bavimo jezikom koji sadrži neki sistematičan način imenovanja njegovih sopstvenih izraza, tako da kada je dat bilo koji izraz tog jezika, takav kao što je to neka rečenica, možemo da budemo u stanju da otkrijemo koji je drugi izraz tog jezika dat pod nečijim imenom. Ako pišemo (*x*) kao ime za izraz *x*, iskazi čiji je oblik 'Ako nužno *p* onda *p*' moraće da budu iznova zapisani kao 'Ako je (*p*) nužno, onda *p*', a slično će biti i sa tumačenjima ostalih modalnih zakona. Tako preobraćeno 'Ako je (*p*) nužno, onda *p*' treba da se shvati kao 'Ako je (*p*) dokazivo, onda *p*', a 'dokazivo' treba da znači 'izvodivo na osnovu takvih-i-takvih transformacija rečenica (*q*), (*r*), (*s*),' šta god da jesu rečenice koje su izabrane kao aksiome i transformacije koje su izabrane kao pravila derivacije.

Mogućnost predstavljanja modalnih sistema na ovaj način pomenuo je ranih 1930-tih Gödel, koji je, međutim, naveo jedno ograničenje za bilo koji takav program. Na osnovu sagledavanja njegovog dokaza da konzistencija Peanove aritmetike ne može biti dokazana - barem ne u tom slučaju ako je Peanova aritmetika zaista konzistentna - u samoj Peanovoj aritmetici, sledi da u Peanovoj aritmetici ne možemo dokazati da ono što je dokazivo u Peanovoj aritmetici jeste istinito. Stoga, ako nužnost znači dokazivost iz aksioma i pomoću pravila koji su dovoljni za

Peanovu aritmetiku, zakon koji ne možemo konzistentno imati je ´(Ako je (*p*) nužno, tada *p*) jeste nužno´, što je kopija modalnog zakona ´Nužno (ako nužno *p*, onda *p*)´. Ako smo spremni da nužnost odredimo u terminima dokazivosti na donekle slabijoj osnovi nego što je imaju postulati Peanove aritmetike, možemo konzistentno imati ´modalan´ sistem (gore pomenute vrste) koji sadrži gore pomenute zakone, ali ne u kombinaciji sa izvesnim drugim zakonima čiji su odgovarajući delovi prisutni čak i u najslabijem Lewisovom sistemu, *S*1. Ovo su nedavno pokazali David Kaplan i Richard Montague, dok je Montague dodao i brojne srodne rezultate, kao što je i taj da ova dva postulata vode inkonzistenciji:

(1) Ako je (*p*) nužno, onda *p*;
(2) Ako je *a* zakon, onda je ´(*a*) je nužno´ takođe zakon.

Dokaz se zasniva na mogućnosti pronalaženja, za bilo koji sintakstički predikat *f* u jeziku koji sadrži svoju sopstvenu sintaksu, rečenice *S* tako da je ´*S* ako i samo ako *f*(*S*)´ dokazivo. Ako kao *f* uzmemo ili ´nije nužno´ ili ´ima nužnu negaciju´, dokaz iz (1), (2) i teoreme o *S* veoma je lak. Na primer, možemo nastaviti dalje ovako:

(3) *S* ako i samo ako (*S*1) nije nužno.
(4) Ako ne *S* onda je (*S*) nužno (iz 3).
(5) Ako ne *S* onda *S* (iz 4 i 1).
(6) *S* (iz 5).
(7) (*S*) nije nužno (iz 6 i 3).
(8) (*S*) je nužno (iz 6 i 2).

Nijedna od ovih posledica ne sledi ako se pridržavamo toga da nužnost učinimo sintaktičkim predikatom koji pridajemo imenima rečenica, a ´nužno´ upotrebljavamo kao prilog koji rečenicama pridajemo na uobičajen način. Na ovu uobičajenu gramatiku vratićemo se u odeljku koji sledi.

Modalnost i kvantifikacija

Priloški znaci za modalost mogu biti postavljeni ne samo ispred znakova za negaciju, implikaciju, konjunkciju i disjunkciju, već takođe i ispred ili iza znakova za kvantitet, ´sve´ i ´nešto´. Poredak je i ovde često značajan. Na primer, ´Svako ima šansu

da pobedi´ (´Za svako *x*, moguće je da će *x* pobediti´) ne kazuje isto što i ´Ima šanse da će svako pobediti´ (´Moguće je za svako *x*, *x* će pobediti´); drugo implicira prvo, ali ne i obrnuto. Današnje rasprave povodom ovoga problema najčešće ukazuju na srednjovekovno razlikovanje između modalnosti de dicto i de re. U ´Svako ima šansu da pobedi´, mogućnost pobede predviđena je za svaki od individualnih objekata (res) koji se razmatraju, ali u drugom obliku ´Ima šanse da će svako pobediti´, ovo je u potpunosti dictum, ili iskaz, ´Svako će pobediti´ koji je modifikovan pomoću ´moguće´.

Prve pokušaje kombinacije modalne logike sa teorijom kvantifikatora ´Za svako *x*´ ´Za neko *x*´ načinila je ranih 1940-tih Ruth C. Barcan, kasnije Ruth Barcan Marcus (´Functional Calculus of First Order Based on Strict Implikation´, *Journal of Symbolic Logic*, Vol.11, 1946, 1-16). Ona je Lewisovom sistemu *S2* dodala (a) jednu od uobičajenih osnova za teoriju kvantifikacije i (b) poseban aksiom vezivanja, kako bi dobila da kada bi moglo biti da nešto ima svojstvo φ, tada postoji nešto što bi moglo imati svojstvo φ. Na osnovu ove vrste aksioma bila je u stanju da dokaže različite zakone, uključujući tu i jednosmernu implikaciju pomenutu u prethodnom paragrafu. Njen poseban aksiom (b) donedavno je bio shvatan kao suvišan, zbog toga što je on dokaziv na osnovu onoga što stoji na raspolaganju, ukoliko kombinujemo neku od običnih osnova za teoriju kvantifikacije sa strožijim modalnim sistemom *S5*.

Međutim, zakon (b) je, gledano sa istog stanovišta, kontraintuitivan. Šta ako razlog zbog kojeg ´bi moglo biti da nešto ima svojstvo φ´ nije isti sa tim da ´postoji nešto što može biti φ´, već je pre te vrste da mada ništa što aktualno postoji ne može imati svojstvo φ´, svet bi mogao da sadrži različita bića koja su nesaglasna u poređenju sa onima koja sada sadrži? Slični argumenti protiv nekih deriviranih zakona koji su sadržani u Barcan sistemu postavljani su i u poznom Srednjem veku. Na primer, Jean Buridan je tvrdio da postoje izuzeci od zakona ´Ako moguće sve φ, onda moguće φ´, zbog toga što iz ´Može biti da sve jeste bog´ (što je istinito jer bog može uništiti sve što je stvoreno) ne sledi da ´Sve može biti bog´ (zato što to ne može biti ništa što je stvoreno).

Zapravo, zakoni ove vrste mogu važiti bez ograničenja jedino ako pretpostavimo to da što god da postoji obavezno je da to

čini i da što god da bi moglo da postoji stvarno i postoji - to jest, ako pretpostavimo to da kako god da različita mogu biti stanja stvari koja predstavljaju moguće alternative ovom aktualnom, ona sva sadrže neke individualne objekte. Ali modalna logika koja izostavlja ovaj postulat u podjednakoj se meri može razlikovati od opštih sistema, čak i u njenom nekvantifikovanom delu. Zbog toga što se može tvrditi to da u mogućem stanju stvari u kojem nije sadržan objekat *A* ne bi bilo nijedne pozitivne ili negativne činjenice o *A*, tako da, na primer, ´*A* je *A*´ i pored toga što nije lažno u bilo kojim mogućim okolnostima, u nekima može biti ni lažno ni istinito, te zbog toga njegova lažnost može biti nemoguća a da njegova istinitost pri tome nije nužna. Ovo bi bilo značenje izostavljanja gore pomenutih elementarnih ´ekvipolencija´. Modalni sistem nazvan *Q*, zajedno sa ovom kao i modifikacijama koje odatle proizilaze, skicirao je A.N. Prior a aksiomatizovao R.A. Bull. S.A. Kripke, u daljem razrađivanju svojih modela za modalne sisteme, skicirao je alternativnu koncepciju, u kojoj u svetu koji ne sadrži *A* ne postoji prosta pozitivna činjenica o *A* ali postoji ipak negativna, kao i druge koje su složene. Ovo takođe iziskuje napuštanje zakona za kvantifikovane modalne logike tipa Barcan, dok daleko manje drastično modificira osnove koje nisu kvantifikovane.

Radikalnije primedbe, koje se ne tiču samo Barcan sistema već celog programa kombinovanja modalne logike sa teorijom kvantifikacije, izneo je W.V. Quine. Takav program, tvrdi on, od nas iziskuje oživljavanje prevaziđenog dela aristotelizma. Aristotel je pravio razliku između onoga što je zvao ´esencijalnom´ i ´akcidentalnom´ predikacijom, a još barem od Johna Stuarta Milla je bilo široko prihvaćeno da se pravi smisao ovoj razlici može dati kada su stavovi na koje se ona odnosi opšti, a ne pojedinačni. Na primer, možemo reći da je čovek esencijalno racionalan, a po akcidenciji suvozemac, ukoliko pod tim mislimo da biti racionalan predstavlja deo onoga što mislimo pod biti čovek, ali da biti suvozemac to nije. Međutim, nikakav takav smisao ne bi mogao biti dat stavu da je ovaj objekat preda-mnom, recimo John Jones, esencijalno racionalan ali suvozemac samo akcidentalno (´Individue nemaju esenciju´, kao što je to Mill tumačio). Prevodeći ovo u jezik modalne logike, možemo reći da je nužna istina da su ljudi racionalni, pošto je nužna istina da šta god da je racionalna životinja jeste racionalno, ali

ne možemo reći da je nužno to da on bude ili racionalan ili bilo šta drugo. Međutim, kvantifikovana modalna logika biva isprazna komplikacija sve dotle dok nismo u stanju da damo značenje takvim oblicima kao što je 'Za neku individuu *x*, nužno je da *x* treba da ima φ'.

Jedini odgovor na ovo jeste da stanovište nije nužno pogrešno samo zato što ga je zastupao Aristotel, i da jedini 'esencijalni' atributi individua kojima modalna logika barata jesu trivijalni kao što je to 'pripiši φ ako nešto ima φ'. Za neku osobu je esencijalno to da on treba da pripiše φ-ako-je-on-φ; logička je istina da on mora ovo da učini - ili ako nas prethodno uvedena razmatranja sprečavaju da to kažemo baš u toj meri, možemo reći o bilo kojoj individui *x* da nije moguće da on treba da pripiše da ne φ-ako-je-on-φ (da bi on trebalo da pripiše bude - φ-bez--pripisivanja-φ). Takođe, da sa svakim individualnim objektom *x* je nužno istinito, ili barem nije moguće lažno, da to treba da bude taj objekat *x* (zato što ako je bilo drugih objekata namesto njega tada on ne bi bio taj već onaj drugi objekat, što je bio onaj drugi objekat). Ali ovo uvodi novi problem.

Modalnost i identitet: referencijalna nejasnost

R.B. Marcus podstakla je izučavanja posledice adicije modalnoj logici ne samo teorije kvantifikacije već takođe i uobičajenih postulata koji se odnose na identitet, naime da je sve identično sa samim sobom i da ako su *x* i *y* jedna i ista stvar, tada šta god je istinito za *x* jeste istinito za *y* (što se ponekada naziva 'Leibnizov zakon' ili 'nerazličitost identičnih' /'the indiscernibility of identicals'/). Problem postavljen u prethodnom odeljku ovde ponovo iskrsava, zajedno sa još nekim koji su novi. U stvari, lako je dokazati iz uobičajenih asumpcija da ako su *x* i *y* sasvim identični da je njihov identitet nužna istina. Zato što ako je *x* zaista identično sa *y*, tako da što god je istinito za *x* jeste istinito za *y*, tada, pošto je istinito da je *x* nužno identično sa *x*, mora biti istinito i da je *x* nužno identično sa *y*.

Posebno oštre prigovore ovom rezultatu je uputio W.V. Quine. On skreće pažnju na to da jutarnja zvezda jeste identično sa večernja zvezda, a da jutarnja zvezda jeste nužno identično sa jutarnja zvezda, mada večernja zvezda nije nužno identično sa jutarnja zvezda već je to samo kontingentno. Konteksti u kojima

možemo međusobno zameniti identičnosti a da pri tome ne izgubimo istinitost Quine je nazvao 'referencijalno transparentnim', a one u kojima ne možemo nazvao je 'referencijalno nejasnim' (odnosno nerazgovetnim, 'referentially opaque'). Modalni konteksti, kao što je to '... jeste nužno identično sa jutarnja zvezda' u celini su referencijalno nejasni i po Quineovom gledištu za njih nema mesta u doslednom naučnom jeziku.

Neki pisci - na primer, Hintikka - razvili su forme modalne logike sa identitetom u kojima postoji zakon po kojem ne važi da ako *x* zaista jeste identično sa *y* tada šta god da je istinito za *x* jeste istinito za *y*, već jedino važi to da ako *x* jeste nužno identično sa *y* tada šta god da je istinito za *x* jeste istinito za *y*. Alternativno, može se tvrditi (kao što je to bio slučaj kod Arthura Smullyana) da Leibnizov zakon važi za takve *x* i *y* koji neposredno imenuju sve što god imenuju, a ne za one *x* i *y* koji izdvajaju ono što imenuju samo kao stvar, šta god da je ona, koja odgovara na neki *određeni opis* (definite description), kakav predstavlja i 'jutarnja zvezda'. Ako su *x* i *y* naprosto privezak istog objekta, tako da '*x* je *y*' jeste tek 'Ovo je ovo', tada je to (kada je u potpunosti istinito) nužna istina. Ali određeni opis je složen prefiks nalik kvantifikatoru, tako da 'Jutarnja zvezda jeste večernja zvezda' nije stvarno prost oblik '*x* je *y*'; to znači da ili 'Nešto je istovremeno samo i ništa drugo do jutarnja zvezda i samo i ništa drugo do večernja zvezda' ili 'Šta god jeste samo i ništa drugo do jutarnja zvezda jeste samo i ništa drugo do večernja zvezda'. Ni iz jednog od ova dva ne sledi da zato što je nužno istinito da šta god da je samo i ništa drugo do jutarnja zvezda jeste samo i ništa drugo do jutarnja zvezda, da je zato nužna istina da šta god da je samo i ništa drugo do jutarnja zvezda jeste samo i ništa drugo do večernja zvezda.

Izgleda da je jasno, nezavisno od stanovišta o ovom problemu, da kada se modalna logika i teorija identiteta dovedu u vezu Leibnizov zakon treba da bude primenjen sa oprezom, mada pažnju možemo usredsrediti na različite stvari. Možemo, zajedno sa Quineom, posmatrati 'kontekste' u koje smo ogrnuli naše identičnosti -odnosno, stvari za koje smo rekli da su istinite za *y* zbog toga što su istinite za *x*, pošto je ovo identično sa *y* - i zastupati to da modalni konteksti, na primer, nisu obuhvaćeni zakonom. U tom slučaju ne moramo biti previše pedantni kada biramo izraze za *x* i *y* koji treba da vrše ovaj zadatak. S druge

strane, možemo *x* i *y* strogo ograničiti na Russellova 'logička vlastita imena' (logically proper names) nakon čega možemo biti u stanju da lako i nesputano baratamo sa našim 'kontekstima'.

Slična razmatranja mogu se primeniti i kada pokušavamo da kombinujemo modalnu logiku sa teorijom klasa i brojeva. Pretpostavimo da su ljudi jedine racionalne životinje i istovremeno jedini dvonošci koji nemaju perje; na osnovu uobičajenog stanovišta o identitetu klase, sledi da je klasa racionalnih životinja istovremeno jedan i isti objekat - ako je to uopšte objekat - kao i klasa dvonožaca koji nemaju perje. Ali po svemu sudeći da i pored toga što klasa racionalnih životinja jeste nužno isto što i klasa racionalnih životinja, tek je kontigentna činjenica to da je ona isto što i klasa dvonožaca koji nemaju perje. Ako su klase pravi (genuine) objekti, tada smo ponovo prisiljeni da Leibnizov zakon ograničimo na 'referencijalno transparentne' kontekste, ali ako su oni tek logičke konstrukcije u kojima je svaki razgovor o identitetu klasa samo parafraza razgovora o funkcijama koje bivaju zadovoljene od strane istih objekata, tada paradoks nestaje čim obrazujemo parafrazu.

Nealetičke modalnosti

Sintetički gledano, znaci modalnosti jesu izrazi koji, kada su pridodati rečenicama, obrazuju druge rečenice ('nužno' obrazuje rečenicu 'Nužno je da 2 i 2 jeste 4' iz '2 i 2 jeste 4'). Po tome oni liče na znake negacije ('Nije slučaj da...'), ali se od znakova za negaciju razlikuju po tome što nisu istinosno-funkcijski, ili, kao što se obično kaže, po tome što nisu 'ekstenzionalni'. Istinitost ili lažnost modalno kvantifikovanog stava ne zavisi jedino od istine i laži prvobitnog stava. Svakako da ako je *p* lažno, to je i 'Nužno *p*', a ako je *p* istinito, to je i 'Moguće *p*', ali ako je *p* lažno ono može ali ne mora biti moguće, kao što i onda kada je istinito može a ne mora biti nužno. Ovo svojstvo (neekstenzionalnost) jeste zajedničko za modalne kao i mnoge druge funkcije, a prirodno proširenje modalnih logika vodi ka tome da se isto tako obuhvate i neke od ovih drugih.

G.H. von Wright opisuje uobičajene modalne funkcije (nužnost, mogućnost, itd.) kao 'aletičke' modalnosti i upoređuje ih sa 'deontičkim' modalnostima obavezivanja, dopuštanja, itd. (vidi Poglavlje *Deontička logika*), kao i sa 'epistemičkim' modal-

nostima znanja da je istina, neznanja da je laž, itd. Vremena se takođe mogu tretirati kao vrsta modalnosti. U nekima od njih možemo zapaziti sasvim čvrstu logičku strukturu koja istovremeno nalikuje ali se i razlikuju od one koju imaju uobičajeni modalni sistemi. Na primer, kao što nešto ne može biti i nužno i nemoguće, tako isto ništa ne može biti ujedno i obavezujuće i zabranjeno, ništa ujedno i znano kao istinito i znano kao lažno. Sa druge strane, mada je šta god da je istinito *ipso facto* moguće, ono što je aktualno učinjeno ne mora biti nešto što će biti učinjeno u neko buduće vreme, ili što je već bilo učinjeno u prošlosti.

U ovom proširenom smislu, kao modalnosti mogu biti shvaćene čak i kvantifikacije (von Wright ih zove 'egzistencijalnim' modalnostima). '*X* jesu univerzalno *Y*' (ili '*X* jesu uvek *Y*') ima sličan okvir kao i '*X* jesu nužno *Y*' i na sličan način implicira 'Ovo *X* jeste *Y*', koje opet implicira '*X* jesu ponekad *Y*'. Isto tako, jednosmerna implikacija 'Ako nešto nužno daje svojstvo *f*' onda nužno nešto daje svojstvo *f*' jeste nalik implikaciji 'Ako nešto daje svojstvo *f* svemu, onda sve ima nešto što mu daje svojstvo *f*', sa drugom kvantifikacijom namesto modalnosti. Neki pisci koji iskazuju sumnju kada je reč o uobičajenim modalnostima - na primer Russell - smatrali su da su one prerušene kvantifikacije. Ali sam Russell je ukazao na to da se kvantifikacije u osnovi pridodaju pre svojstvima (ili 'iskaznim funkcijama') nego celovitim iskazima: kažemo da svojstvo *f* 'univerzalno' implicira svojstvo *j*, ali da celoviti iskaz *p* 'nužno' implicira da *q*. Možemo, zaista, izjednačiti modalnosti sa kvantifikacijama kada se radi o 'slučajnostima', ili 'mogućim svetovima', ali ko god gaji sumnju u modalnosti takođe je sklon sumnji i kada je reč o ovim entitetima, dok oni koji ne sumnjaju ni u jedno od ova dva mogu biti pre skloni tome da pojam 'mogući svet' objasne terminima pojedinačne stvari koja je moguća, nego obrnuto. Na primer, C.E. Meredith usvojio je Wittgensteinovu definiciju aktualnog sveta kao 'sve ono što je slučaj', razumevajući pod tim prostu shvatljivu činjenicu (tj. konjunkciju čije konjunkte predstavljaju sve kontingentne činjenice) iz koje slede sve dalje pojedinačne činjenice, tako da bilo koja laž (tj. pobijanje bilo koje činjenice) jeste inkonzistentna sa ovim. Tada bi 'mogući' svet bio bilo koji iskaz koji je,

mada ne implicira toliko da bi mogao biti nemoguć (ne implicira, na primer, iskaz zajedno sa njegovom negacijom), toliko obuhvatan da ili striktno implicira ili je striktno inkonzistentan sa bilo kojim datim pojedinačnim iskazom. Biti 'istinit' u takvom svetu značilo bi biti njegova striktna posledica.

Kada je reč o opštim odlikama onih funkcija koje sintaktički nalikuju modalnim, postoje neke takve kao što je to 'Veruje se da *p*', za koje je teško pronaći bilo kakve formalne zakone. Ali čak i kod njih se postavljaju problemi analogni onima koji se pojavljuju u samoj modalnoj logici, a ponekad je u ovim slučajevima, koji ne predstavljaju striktno modalne funkcije, lakše uvideti barem šta je to u njima sporno. Na primer, teškoće koje su Kaplan i Montague pronašli u sintaktičkoj interpretaciji modalnih sistema u početku su bile neobrađene, onda kada su oni pokušavali da kao predikat koji se pridaje rečenicama upotrebe ne 'jeste nužno' već 'jeste poznato'. Takođe, neke od Quineovih najuputnijih rasprava o referencijalnoj nejasnosti više se bave verovanjem i srodnim temama nego mogućnošću i nužnošću. Na primer, on napominje da ako dozvolimo da izrazi poput 'jutarnja zvezda' budu zamenljivi u našim formulama sa *x*-ovima i *y*-ima, postoji oštra razlika s obzirom na referencijalnu nejasnost između formi '*x* veruje da *y* ima svojstvo φ' i '*x* veruje da *y*-u da ono ima svojstvo *f*'. Ako *x* veruje da večernja zvezda nije jutarnja zvezda, odatle ne sledi da on veruje da jutarnja zvezda nije jutarnja zvezda, ali ako on o večernjoj zvezdi veruje da ona nije jutarnja zvezda, odatle sledi da on o jutarnjoj zvezdi veruje da ona nije jutarnja zvezda (ovo se, naravno, tiče greške samog *x*, ali empirijske a ne logičke). Primer otkriva jednu od smetnji takvog načina rukovanja ovim problemima; on nas navodi na priznavanje dve sintaktički različite vrste verovanja, 'verovanja da *p*' i 'verovanja o *x* da ono ima svojstvo φ' - ili, kako to Quine kaže, 'verovanja u φ-stvo *x*-a' ('pripisivanja *x*-u svojstva biti -φ') - veza među njima je sasvim nejasna. S druge strane, ako ograničimo naše *x*-ove i *y*-e na direktnu identifikaciju individua, možemo izjednačiti 'verovanje o *x* da ono ima svojstvo φ' sa jednostavnim 'verovanjem da *x* ima φ' i razliku između Quineova dva slučaja predstaviti parafraziranjem '*x* veruje o jutarnjoj zvezdi da to nije jutarnja zvezda' kao 'Za neko *y*, *y* je u stvari jutarnja zvezda ali *x* veruje da ono to nije'

U kvazi-modalnim oblastima najosetljivija logička struktura se možda može pronaći među vremenima (tenses)* , mada neki logičari veruju da bi logički precizan jezik sasvim ostao bez vremena (baratajući jedino datiranim rečenicama i rečenicama o vremenskom poretku događaja, koje su istinite vanvremeno, a ostavljajući po strani takve kao što je 'Pojeo sam svoj doručak', koje su u jednom trenutku lažne a u drugom istinite). Izvestan doprinos, svakako, već se može naći u diodorovskom shvatanju uobičajenih modalnosti. Ako napišemo '*Fp*' za 'Biće slučaj da *p*', '*Pp*' za 'Bio je slučaj da *p*', '*Gp*' za 'Uvek će biti slučaj da *p*', a '*Hp*' za 'Uvek je bio slučaj da *p*', tada možemo obrazovati složena vremena kao futur perfekt '*FPp*', 'Uvek će biti slučaj da je bio slučaj da *p*'. Ona se onde pojavljuju kao jednosmerna implikacija između svake od sledećih formi i njenih sledbenika:

GHp, FHp, Hp, PHp, HFp, Pp, GPp, FPp.

Takođe, čisto *p* ('Slučaj je da *p*') sledi iz *FHp* ('Biće da je uvek bio slučaj da *p*') a implicira *GPp* ('Uvek će biti da je bio slučaj da *p*'). Pokazuje se i da svaki od ovih zakona ima 'odraz u ogledalu' u kojem *H* smenjuje *G* ili obratno, a *P* smenjuje *F* ili obratno (na primer, baš kao što *PHp* implicira *HPp*, tako *FGp* implicira *GFp*). Izvesne zadovoljavajuće teze redukcije, takve kao što je da će biti da će biti da *p* ako i samo ako će biti da *p* (*FF* = *F*), omogućuje da objedinimo sve sekvente sa *F*, *P*, *H*, i *G*, ma kako da su dugi, u jedan, odnosno u neki od gore navedenih, ili u njegov odraz u ogledalu.

Ovi rezultati, koji su pronalasci C.L. Hamblina, prenebregavaju izvesne probleme koji se tiču nepermanentnih objekata i analogni su problemima kontingentnih objekata u običnoj modalnoj logici, što može dovesti do komplikovanja sistema. C.S. Peirce i Gilbert Ryle su, na primer, smatrali da postoje određene singularne činjenice (definite singular facts), mada ne naprosto pozitivne, o onome što više ne postoji (Sokrat nije sada mudar, ali sada je činjenica da on to nije mada je jednom to bio) već samo opšte činjenice o onome što više ili još ne postoji (pre nego što sam postojao niti je bila činjenica niti laž da sam bio mudar ili da ću pisati ovaj članak, mada je mogla čak i tada biti

* Ovde je reč o vremenima kako ih predstavljamo u okviru gramatike, a ne fizike /prim. prev./.

činjenica da će neko postati osoba sa takvim-i-takvim karakteristikama - takvim koje ja samo imam - koja bi ga napisala. To bi značilo da 'Ako *p* tada će uvek biti da je bio slučaj da *p*' uvek važi ali da njegov odraz u ogledalu 'Ako *p* tada je uvek bilo da će biti da *p*' ima izuzetke i da buduća bića treba uzimati kao ona koja su moguća u Priorovom modalnom sistemu *Q*, dok prošla, kao ona koja su moguća u alternativnom sistemu Kripkea. Da li je vremenska logika čiji je razvoj prikazan duž ovih redova konzistentna (sa kvantifikacijom i identitetom), još ostaje da se utvrdi.

Bibliografija

U većini savremenih razmatranja o modalnoj logici pretpostavlja se *Symbolic Logic*, C.I. Lewisa i C.H. Langforda (New York, 1932; novo izdanje sa novim dodatkom, 1951). Pregledi nekih drugih problema sadržani su kod G.H. von Wrighta u *An Essay in Modal Logic* (Amsterdam, 1951); kao i kod A.N. Priora u *Formal Logic* (Oxford, 1962; 2nd ed.; Part II, Ch. 1 i Appendix I, Sect. 11.) i *Time and Modality* (Oxford, 1957). Posebno vredna zbirka tekstova se nalazi u *Acta Philosophica Fennica*, Fascicule 16 (1963), i sastoji se od saopštenja sa kolokvijuma o modalnoj i polivalentnoj logici koji je održan u Helsinkiju, 1962.

Aristotelova modalna logika je predstavljena uglavnom u *De Interpretatione*, Poglavlja 11 i 12, kao i u *Prvoj analitici*, Knjiga I, Poglavlja 8-22; idi takođe *Metafizika*, Knjiga Γ, Poglavlja 4 i 8, i Knjiga Δ, Poglavlje 4, i *De Caelo*, Knjiga I, Poglavlje 12. O antičkim i srednjevekovnim razmatranjima, pogledaj kod W. Kneale i M. Kneale, *The Development of Logic* (Oxford, 1962; Ch. 2, Sec. 7, Secs. 2 i 3, i Ch. 4, Secs. 2, 3 i 5), kao i kod Nicholas Rescher, *Studies in the History of Arabic Logic* (Pittsburgh, 1964; Chs. 2, 8 i 10).

O sledu, polazišna tačka je članak G.E. Moorea "External and Internal Relations" u njegovoj *Philosophical Studies* (London, 1922). O razlici sleda i striktne implikacije pogledaj E. J. Nelson, "Intensional Relations", u *Mind* (1930); Wilhelm Ackermann, "Begründung einer strengen Implikation", u *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 21 (1956), 113-128; i A.R. Anderson i N.D. Belnap, "The Pure Calculus of Entailment", u *Journal of Symbolic Logic* (March, 1962). O teškoćama alternativa strik-

tnoj implikaciji pogledaj J.F. Bennett, "Meaning and Implication", u *Mind* (1954), i T.J. Smiley, "Entailment and Deductibility", u *PAS* (1958-1959).

O računima striktne implikacije vidi Ian Hacking, "What Is Strict Implication?" u *Journal of Symbolic Logic* (March, 1963) i C.A. Meredith i A.N. Prior, "Investigations Into Implicational S5", u *Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 10 (1964). O materijalnoj implikaciji kao posebnom slučaju striktne implikacije vidi *The Collected Papers of C.S. Peirce* (Charles Hartshorne, Paul Weiss i Arthur W. Burks, eds., 8. vols., Cambridge, Mass., 1931-1958; 2.348-354, 3.374-375, 3.440-445).

Interpretacije modalnih funkcija se pojavljuju *Meaning and Necessity* Rudolpha Carnapa (Chicago, 1947), kao i u sledećim člancima u *Acta Philosophica Fennica*, Fascicule 16 (1963): J. Hintikka, "The Modes of Modality", 65-82; S.A. Kripke, "Semantical Considerations of Modal Logic", 83-94; R. Montague, "Sintactical Treatments of Modality", 153-168; i T.J. Smiley, "The Logical Basis of Ethics", 237-246. Vidi takođe D. Caplan i R. Montague, "A Paradox Regained", u *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 1, No. 3 (July,1960), i A.N. Prior "Tense Logic and the Continuity of Time", u *Studia Logica*, Vol. 13 (1962).

O modalnom sistemu *Q* pogledaj A.N. Prior, *Time and Modality* (Oxford, 1957) i "Axiomatisations of the Modal Calculus *Q*", u *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 5, No. 3 (July 1964), 215-217; i R.A. Bull, "An Axiomatization of Prior's Modal Calculus *Q*", *ibid*, 211-214.

O referencijalnoj nejasnosti (referential opacity) vidi W.V. Quine, *From Logical Point of View* (Cambridge, Mass., 1953; Ch. 8) i *Word and Object* (New York, 1960; Chs. 4-6); P.T. Geach, "Quantification Theory and the problem of Identifying Objects", u *Acta Philosophica Fennica*, Fascicule 16 (1963) 41-52; i A.N. Prior, "Is the Concept of Referential Opacity Really Necessary?", *ibid*, 189-200.

A.N. Prior

POLIVALENTNA LOGIKA

Kao opšteprihvaceno logičko učenje stoji da je svaki iskaz ili istinit ili lažan, kao i to da, mada postoje posredne mogućnosti izmedu nečega što je izvesno istinito i nečega što je izvesno lažno, ne postoji ništa slično nečemu što bi bilo izmedu same istinitosti i lažnosti. Ovo načelo je jedna verzija zakona isključenja trećeg. Danas se istinitost i lažnost obično opisuju kao dve moguće istinosne vrednosti iskaza, dok se zakon isključenja trećeg, u ovde datom obliku, shvata kao zakon bivalencije. Međutim, tokom različitih vremena logičari su razmatrali stanovište po kojem može biti i drugih mogućnosti - da može postojati i više od dve istinosne vrednosti. U antičkom periodu, kao i u periodu srednjeg veka, ova je ideja bila povezana sa posebnim filozofskim problemom. Tokom ovog veka, mada je polazišna tačka (barem kada je reč o Janu Łukasiewiczu) bila isti filozofski problem, naglasak je bio na izradi, na matematički rigorozan način, onih zakona koje može sadržati 'polivalentna' (multivalued) logika, dok su sistemi i tehnike koji su otuda proistekli, sagledani kao primereni za one filozofske upotrebe i interpretacije koje su sasvim drugačije od onih koje su predstavljale podsticaj na ovaj rad.

Problem buduće kontingencije

Aristotelov spis *De Interpretatione* bavi se podelom stavova na kontradiktorne parove, koji su ograničeni time što im je jedan član istinit a drugi član lažan. U devetom poglavlju Aristotel postavlja pitanje da li se to, zapravo, može učiniti i sa stavovima u budućem vremenu, a koji se tiču 'kontingentnih stvari', to jest

koji se odnose na stvari u kojima ono što će se dogoditi, ili što se neće dogoditi, ni na koji način nije još ustanovljeno. Njegov je zaključak nejasan, ali mnogi komentatori drže da je tvrdio da stav poput 'Sutra će biti pomorska bitka', onda kada još nije odlučeno da li će takvo nešto biti ili neće, još nije aktualno istinit ili aktualno lažan, već je potencijalno i jedno i drugo. Bilo da je ovo Aristotelovo tumačenje ispravno ili ne, izvesno je da su Epikurejci držali da je zakon bivalencije lažan, što je bila jedna od njihovih razlika u odnosu na stoičke logičare, kakav je bio Hrizip. Ovaj problem nanovo su postavili srednjovekovni logičari, a neki od njih su držali da su iskazi o budućim kontingencijama 'srednji' (neuter), odnosno niti istiniti niti lažni. Ovo je podstaklo očite probleme o obuhvatnosti božije moći predviđanja. Posebno opširna rasprava o ovom problemu, o čemu su sačuvani zapisi (i u ovom veku objavljeni), odvijala se u Louvainu sredinom petnaestog veka, dok je glavni pobornik trovalentnog sistema bio Peter de Rivo.

Oni koji su pobijali to da je Aristotel verovao u iskaze sa srednjom vrednošću smatrali su da je držao da su istine o prošlosti sada nužne (ono što je bilo ne može sada biti da nije bilo), ali da su neke istine o budućnosti kontingentne; u ovom slučaju ni 'Biće da *p*' niti 'Neće biti da *p*' samo po sebi nije nužno, mada je zapravo jedno od ova dva istinito, dok disjunkcija ova dva iskaza, 'Ili će biti, ili neće biti, da *p*' jeste nužno istinita.

Glavni prigovor ovom stanovištu sastoji se u tome da ono ne objašnjava kako je Aristotel odgovorio na određeni tok rasuđivanja koji se u istoriji ovoga predmeta iznova pojavljuje, a prema kojem sasvim izvesno da nije bio ravnodušan, kako je to u toku sopstvenog izlaganja i sam nagovestio. Ono se odvija na sledeći način: Ako se kao pouzdano uzme da su (u šta je Aristotel bio uveren) sve istine o prošlosti nužne (u tom smislu da za sve što god počinje da propada sada ne može biti da to nije počelo da propada), tada ako su svi iskazi (čak i oni o budućnosti) već ili istiniti ili lažni, sve istine o budućnosti moraju biti nužne (što je zaključak koji je Aristotel sasvim izvesno pobijao). Pretpostavimo da je juče bilo istinito da će se kroz dva dana dogoditi pomorska bitka. Pošto je to već postalo istinito, ne može biti da to tako i ne bude. Ali što god da nužno sledi iz onoga što je neumitno, to je i samo neumitno, pa pošto je juče bilo istinito da će kroz dva dana biti pomorska bitka, otuda nužno sledi da će sutra

biti pomorska bitka. A ako je već juče bilo lažno da će kroz dva dana biti pomorska bitka, rasuđivanjem po analogiji slediće da je neumitno i to da sutra *neće* biti pomorska bitka. Međutim, ova buduća pomorska bitka ne može zaista biti kontingentna stvar, a isti će tok argumenta potisnuti kontingenciju i iz svih budućih, bez obzira kakvih, stvari. Čini se da je jedini način da se izbegne ovakvo rasuđivanje onaj pomoću pobijanja toga da je ili već juče bilo istinito, ili već juče bilo lažno - ili, zapravo, da je ili već danas istinito, ili već danas lažno (zato što je tačan interval o kojem se radi očigledno nematerijalan) - da će sutra biti pomorska bitka.

Naravno, konkluzija ovoga argumenta možemo izbeći pobijanjem jedne od njegovih premisa. Neki od antičkih mislilaca su čak pobijali asumpciju da ono što nužno sledi iz onoga što je neumitno jeste i samo neumitno. Drugi, a isto tako i neki od sholastičara (na primer, Ockham i teološki oponenti Petera de Rivoa), pobijali su premisu da mi nemamo nikakve moći nad prošlošću. Mi zaista nemamo nikakvu moć nad onim što bi se moglo nazvati *bona fide* prošlih događaja, ali takva čudnovata 'prošla' stanja stvari kao što je to predašnja istinitost stavova o budućnosti *možemo* sprovesti ili sprečiti nekom našom sadašnjom ili budućom radnjom. Argument se takođe može izbeći povlačenjem razlike između dva smisla 'neće se dogoditi'. 'Sutra neće biti pomorska bitka' može značiti ili 'Sada nije slučaj da će sutra biti pomorska bitka', ili 'Već sada se zna da će sutra biti slučaj da neće biti pomorska bitka'. U predašnjem smislu, ako je događanje pomorske bitke takvo da ono još nije ničim uslovljeno, negativni iskaz je istinit; u potonjem slučaju, on je lažan; ni u jednom slučaju on nema srednju vrednost. A u istim okolnostima, dvosmisleno afirmativno 'Već se sada zna da će sutra biti slučaj da se odigrava pomorska bitka', naprosto je lažno. Ovo rešenje nalikuje na tro-valentno, po tome što pobija načelo da ono što god jeste ili će biti istinito uvek biva istinito, pošto ono takođe dopušta, pored toga što je jednom utvrđeno da je 'Dogodiće se pomorska bitka' istinito, da pre nego što je ovo utvrđeno, nije bilo istinito. (Po izloženom stanovištu ono bi bilo lažno, po trovalentnom stanovištu bi imalo srednju vrednost). Zbog toga se sličan problem javlja i kada je reč o mogućnosti prethodnog znanja budućih kontingencija (jer se ovde ne može za nekoga reći da 'zna' šta nije istinito).

Łukasiewiczevi polivalentni računi

Čak i oni antički i srednjovekovni pisci koji su verovali u srednju istinosnu vrednost veoma su malo učinili na tome da sagledaju kakav bi uticaj ona imala na uvrežene logičke zakone, mada je Ockham (koji sam nije bio zastupnik trovalentne logike) pružio jednu ili dve sugestije o tome šta bi bila istinosna vrednost 'Ako *p* onda *q*' kada bi neka od njegovih komponenti imala srednju vrednost.

Moderni logičari su u prilici da budu precizniji kada je o tome reč, delom zbog toga što su se već privikli na rad sa trovalentnim istinosnim tablicama kako bi bili u stanju da ustanove nezavisnost aksioma u formalnom računu. Na primer, uzmimo simbolizam koji upotrebljava veliko slovo *C* i neograničeno mnoštvo malih slova, pri čemu mala slova predstavljaju dobro obrazovane formule (wffs), dok stavljanje *C* pred bilo koji par dobro obrazovanih formula proizvodi novu formulu. Na primer, *CCpqr* je dobro obrazovana formula (wff), zato što (a) ako su *p* i *q* wffs onda je to i *Cpq* i (b), ako su *Cpq* i *r* wffs onda je to i *CCpqr*. Možemo pretpostaviti da naša mala slova predstavljaju rečenice, a da *Cpq* predstavlja rečenicu 'Ako *p* onda *q*'. Pretpostavimo da smo kao 'aksiome' utvrdili tri wffs (1) *CCpqCCqrCpr*, (2) *CCCpqpp*, (3) *CpCqp* i recimo da su ovi aksiomi 'teze', a da što god da iz ovih teza sledi na osnovu substitucije ili odvajanja (odnosno, Modus Ponendo Ponensa - prim.prev.) takođe jeste teza. Substitucija predstavlja stavljanje wff u tezi namesto malog slova, čije je zamenjivanje izvršeno dosledno u celoj tezi. Na primer, *CCppCqCpp* je rezultat substitucije *Cpp* za *p* u aksiomi (3). Odvajanje se može ovako ilustrovati: Ako kao teze imamo formulu α i takođe formulu $C\alpha\beta$ ('Ako α onda β'), tada α može biti sklonjeno a β posebno uspostavljeno kao nova teza. Ideja ovih procedura sastoji se u tome da je pretpostavljeno da teze jesu formule koje predstavljaju istinite iskaze, bez obzira na to da li mala slova koja su u njima sadržana predstavljaju neke istinite ili lažne iskaze. Očigledno da će ovo svojstvo biti očuvano ako se malo slovo sistematski zameni bilo kojom wff; ako je u ovom smislu wff α uvek istinita i ako je uvek istinito da α povlači β, tada ce β biti uvek istinito. Ako wffs uzmemo tako kao da dobijaju vrednost 1 i 0 (što možemo interpretirati kao 'istinito' i

'lažno'), vrednost bilo koje wff, prema ovome što je bilo predstavljeno njenim malim slovima, može se postići pomoću tablice: *C*11 = *C*00 = *C*01 = 1, *C*10 = 0. Grafički (sa mogućim vrednostima za *p* zapisanih vertikalno, a za *q* zapisanih horizontalno):

C	1	0
1	1	0
0	1	1

Naći ćemo da aksiome uvek imaju vrednost 1 kada se vrednuju pomoću ove tablice, a iz tablice je očigledno da ako je α uvek jednako 1 jedini slučaj u kojem je *C*α*β* uvek je jednako 1 jeste onaj u kojem je *β* uvek jednako 1 (zato što ako je *β* ikad jednako 0 tada je *C*α*β* jednako *C*10 = 0).

Sada hoćemo da znamo da li bilo koja od ove tri aksiome sledi iz preostale dve. Na osnovu obrazovanja nove tablice za *C*, utvrđujemo da druga ne sledi.

C	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

Na osnovu ove tablice i dalje je istinito da ako je α uvek jednako 1 tada je *C*α*β* uvek jednako 1 samo u slučaju ako je *β* jednako 1, a bilo koja wff koju substituiramo namesto malog slova i dalje će imati vrednost u okviru datog opsega (1, ½, 0) koje je imalo i malo slovo. Tako, nas substitucija i odvajanje ne može zavesti od wff koja je uvek jednaka 1 ka nekoj koja to nije. Međutim, ako na osnovu ove tablice vrednujemo aksiome (1) i (3), oni su još uvek jednaki sa 1, ali to nije i aksioma (2) zato što *CCC*½0½½ = *CC*½½½ = *C*1½ = ½. Tako (2) nije izvodivo na osnovu substitucije i odvajanja iz (1) i (3).

Očigledno da ovaj argument važi bez obzira na to kakvu smo interpretaciju pridali vrednostima 1, ½ i 0, kao i nezavisno od toga kakvu interpretaciju smo pridali našim formulama. Prema tome, nema ničega što bi samo po sebi pokazalo da iskazi mogu preuzeti treću vrednost koja je između istinitosti i lažnosti. Međutim, ako imamo nezavisne razloge za razmatranje takve pretpostavke, mi imamo pri ruci instrument kojim možemo doći do toga kakve mogu biti njene posledice. Ranih 1920-tih (mada

su obrisi bili naznačeni i ranije) Jan Lukasiewicz, poljski logičar sa neobičnom veštinom za konstruisanje dokaza nezavisnosti ovoga tipa, naslutio je da logika sa gornjom trovalentnom tablicom za *C* može biti upotrebljena da izrazi antičko i srednjovekovno stanovište da kontingentni budući iskazi nisu ni istiniti ni lažni, već imaju srednju vrednost. On je tablici za *C* dodao vrednost za negaciju, predstavljajući je pomoću *N* - naime, *N*1 = 0, *N*½ = ½, *N*0 = 1 - i odredio je 'Ili *p* ili *q*', *Apq*, kao *CCpqq*, a '*p* i *q*', *Kpq*, kao *NANpNq*. Ove funkcije su dosledno predstavljene tablicama

A	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

K	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

Tablice za *C* i *N* zajedno obrazuju ono što je on nazvao 'matricom', a njegov student Mordchaj Wajsberg utvrdio je da sledeći aksiomi, zajedno sa substitucijom i odvajanjem, pružaju tačno one teze koje dobijaju uvek 1 kada se vrednuju pomoću date matrice: (1) *CpCqp*, (2) *CCpqCCqrCpr*, (3) *CCNpNqCqp*, (4) *CCCpNppp*.

Imajući u vidu ovu interpretaciju buduće kontingencije, Lukasiewicz je uveo funkciju *Mp*, 'Moguće da *p*', sa evaluacijom *M*1 = *M*½ = 1, *M*0 = 0; to jest, iskaz je u celini 'moguć' ako je ili u celini istinit ili ima srednju vrednost, dok nije u celini istinit kada je u celini lažan. Alfred Tarski je zapazio da sklop *CNpp* ima ova svojstva. Može se zapaziti da tablica za *C* čini da je 'Ako *p* onda *q*' istinito sve dotle dok *q* nije manje istinito od *p*, što odražava prirodnu ideju da nas istinita implikacija neće zavoditi na istine koje su različite od onih koje već imamo. Tarskijeva definicija čini da je *p* 'moguće' sve dotle dok *p* nije manje istinito nego što bi to bilo njegovo pobijanje. Tablica za 'Ili ... ili ...' ne može da opravda zakon isključenja trećeg u obliku 'Ili *p* ili ne-*p*' (*A*½*N*½ = *A*½½ = ½). Međutim, tablica ga ni ne pobija, a može se pokazati i to da nijedan od zakona dvovalentne logike nije nikada lažan u Lukasiewiczevom sistemu, mada neki od njih povremeno preuzimaju srednju vrednost.

Najmanje zadovoljavajuće svojstvo ovoga sistema se sastoji u tome što on izostavlja ne samo zakon isključenja trećeg već

takođe i zakon kontradikcije ´Ne i *p* i ne-*p*´, pošto je $NK\frac{1}{2}N\frac{1}{2} = NK\frac{1}{2}\frac{1}{2} = N\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. (On se po tome razlikuje od ´intuicionističke logike´ L.E.J. Brouwera i Arenda Heytinga koja takođe izostavlja zakon isključenja trećeg, ali usvaja onaj koji se tiče kontradikcije). Neko je intuitivno sklon tome da bi u sistemu ove vrste konjunkcija dva iskaza o neodređenoj budućnosti trebalo da ima različite vrednosti u različitim slučajevima. Ako oni predstavljaju nezavisne mogućnosti, biće takođe neodređeno da li će se oba dogoditi ($K\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$), ali ukoliko su suprotstavljeni (kao *p* i *Np*), reklo bi se da je nihovo zajedničko događanje isključeno ($K\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0$). Ali ovo bi delovalo tako što ´*p* i *q*´ više ne bi bilo istinosna funkcija; to jest, njegova vrednost ne bi zavisila samo od istinosne vrednosti njegovih delova.

1954. godine kineski logičar Moh Shaw-kwei predložio je uspešnije tumačenje Łukasiewiczevog trovalentnog sistema - naime, da srednju vrednost treba čitati kao ´paradoksalnu´ i da bi je trebalo pripisati iskazima kao što su ´Ovo što sada govorim jeste lažno´, koje bi obično odredili kao lažne ako je to istinito, a kao istinit ako je to lažno. Negaciju paradoksalnog iskaza, konjunkciju paradoksalnog iskaza sa paradoksalnim ili istinitim iskazom, disjunkciju paradoksalnog iskaza sa paradoksalnim ili lažnim iskazom, kao i implikaciju lažnog iskaza od strane nekog paradoksalnog iskaza, ili paradoksalnog od strane istinitog, sve redom ih je opravdano shvatiti kao paradoksalne; ovo u potpunosti predstavlja rezultate koje pruža Łukasiewiczeva matrica.

Łukasiewicz i ostali takođe su izučavali sistem koji nalikuje ovome gore, ali koji umesto samo tri dopušta neograničen broj istinosnih vrednosti; oni su utvrdili različite istinosne funkcije koje stoje na raspolaganju kada rukujemo sa više od dve istinosne vrednosti; oni su ispitivali još i načine na koje se ovi iskazni računi mogu kombinovati sa odgovarajućom teorijom kvantifikacije.

Ostale interpretacije i upotrebe

Posebne evaluacije koje su pripisane za *C*, *K*, itd. u Łukasiewiczevim sistemima očigledno je da su u određenoj meri proizvoljne i pružaju mogućnost za bezbrojne varijacije. Gotovo istovremeno sa Łukasiewiczevim ranim delom E.L. Post je razvio

sasvim različite polivalentne sisteme. Pokazano je i to da se intuicionistička logika može interpretirati kao sistem sa neograničenim brojem vrednosti, a koji je sasvim različit od Lukasiewiczevog. Isto važi i za brojne sisteme modalne logike - to jest opšte teorije o nužnom i mogućem.

Na ovom mestu treba imati u vidu da ne postoji ništa takvo što bi bilo nužno u toj meri da bi vrednosti koje su pripisane funkcijama iskaza na osnovu datih matrica trebalo shvatiti tako kao da se sastoje od čiste istine, čiste laži, a brojne druge stvari shvatati tako kao da se nalaze tek između ovoga dvoga. Mi sasvim osnovano možemo insistirati na tome da nema ničega između čiste istine i čiste laži, a da pri tome ipak dopustimo ostala drugačija svojstva složenih iskaza koja sistematski zavise od istih svojstava koja se nalaze u njihovim komponentama. Na primer, ako pretpostavimo da postoje tačno dva moguća stanja stvari, možemo podeliti sve iskaze u one koji su i u jednom i u drugom istiniti (vrednost 1), one koji su istiniti u aktualnom stanju ali ne i u njemu alternativnom (vrednost 2), one koji su istiniti u nekom drugom stanju stvari ali ne i u aktualnom (vrednost 3) i one koji su lažni i u jednom i u drugom (vrednost 4), pri čemu ćemo *Kpq* ('*p* i *q*'), *Np* ('Ne-*p*') i *Lp* ('Nužno *p*') vrednovati pomoću sledeće matrice:

K	1	2	3	4	*N*	*L*
1	1	2	3	4	4	1
2	2	2	3	3	3	3
3	3	4	3	3	2	4
4	4	4	3	4	1	4

Na primer, ako je *p* istinito u oba sveta a *q* jedino u prvom, tada je '*p* i *q*' istinito samo u prvom (*K*12 = 2), dok ako je *p* istinito samo u prvom a *q* samo u drugom tada '*p* i *q*' nije istinito ni u jednom od njih (*K*23 = 4). 'Nužno *p*' je u oba sveta istinito ako je i *p* istinito u oba (odnosno, u svim mogućim); dok u drugačijem slučaju nije istinito ni u jednom od njih. Ova matrica opravdava (t.j. u celini pripisuje vrednost 1 za sve vrednosti datih komponenti) sve zakone modalnog sistema *S5* (vidi poglavlje *Modalna logika*), ali isto tako opravdava i izvesne formule koje odslikavaju funkciju po kojoj postoje samo dva moguća sveta i koji nisu intuitivno bliski. Oni nisu u ovom smislu 'karakte-

ristični' za *S5* (ne opravdavaju *sve i samo* zakone iz *S5*. Matricu koja je karakteristična za *S5* dobili bismo kada bismo uveli neograničen broj vrednosti, od kojih bi svaka vrednost bila neograničeni niz koji se sastoji od 1 i 0, a u kojem svako mesto u tom nizu predstavlja mogući svet (gde *p* na tom mestu dobija 1 ako je u tom svetu istinito, a 0 ako je lažno), niz za 'Ne-*p*' dobija 0 tamo gde god niz za *p* ima vrednost 1 i obratno, niz za '*p* i *q*' dobija 0 osim u slučaju gde nizovi i za *p* i za *q* zajedno imaju vrednost 1, niz za 'Nužno *p*' budući da ima svuda 1 tamo gde za *p* stoji 1, dok u drugom slučaju ima 0, a formula je zakon ako cela dobija 1 ma koju vrednost da imaju njene komponente.

Na isti način, iskazima koji su čisto geometrijski može se pripisati osmovalentna matrica u kojoj 1 znači 'istinito u geometriji kao što su euklidovska, rimanovska i lobačevskijeva', 2 znači 'istinito u euklidskoj i rimanovskoj, ali ne u lobačevskijevoj' i tako dalje, već prema ostalim kombinacijama. (Ovu je ideju razvio Alan Rose.)

Sledeći četvorovalentni sistem bio bi dobijen kada bi podelili iskaze saobrazno tome da li su po predmetu na koji se odnose čisto apstraktni ili matematički, ili sadrže neki ukazatelj na prirodne objekte, pripisujući im na taj način vrednost 1 ako su i istiniti i čisto matematički, 2 ako su istiniti ali 'nečisti', 3 ako su lažni i 'nečisti', a 4 ako su čisto matematički i lažni. Uzimajući da *I p* znači 'Čista matematička istina jeste da *p*', za *K*, *N* i *I* imali bismo sledeću tablicu.

K	1	2	3	4	*N*	*I*
1	1	2	3	4	4	1
2	2	2	3	3	3	3
3	3	3	3	3	2	3
4	4	3	3	4	1	4

('Nečistoća' prenosi zarazu na sve iskaze koje dotiče. Na primer, iskaz '2 i 2 jesu 4 i trava je zelena' jeste 'nečisto' zato što je takva i njegova druga komponenta; *K*12 = 2.) Ovom matricom potrebno je da 'raspoznamo' (designate) kako vrednost 2 tako i vrednost 1; to jest, u zakone ubrajamo bilo koju formulu koja uvek ima bilo vrednost 1 ili vrednost 2. Jer u suprotnom 'Ne i *p* i ne-*p*' ne bi bio nikakav zakon, pošto 'Ne i (trava je zelena) i (trava nije zelena)' jeste nečisto; u stvari, tada nijednoj formuli

ne bismo mogli da damo vrednost 1 u slučaju da je njenim komponentama pripisano bilo 2 ili 3.

Još jedan četvorovalentni sistem, koji je Łukasiewiczevo delo, jeste onaj u kojem je funkcija *Mp* data u *dvosmislenoj upotrebi* sa važenjem kako za čisto *p*, tako i za tautološko 'Ako *p* onda *p*'. Ovde imamo parove sa vrednostima 1 i 0, koji se pripisuju svakoj funkciji, kod kojih će na prvom mestu stajati vrednost koju bi dobilo *Mp* kada bi se tumačilo na jedan način, a na drugom mestu koju bi imalo ono kada bi se tumačilo na drugi način. U tom slučaju će matrica za *C*, *N* i *M* biti

C	11	10	01	00	*N*	*M*
11	11	10	01	00	00	11
10	11	11	01	01	01	11
01	11	10	11	10	10	01
00	11	11	11	11	11	01

(Ovde je ključna kolona za *M*; vrednosti *Mp* koje stoje na prvom mestu istovetne su sa vrednostima koje stoje na prvom mestu i kod vrednosti za *p*, dok je njegova vrednost na drugom mestu 1 nezavisno od vrednosti koja stoji na drugom mestu za *p*). Ovo se naziva 'proizvodom' dve matrice

C	1	0	*N*	*M*
1	1	0	0	1
0	1	1	1	0

C	1	0	*N*	*M*
1	1	0	0	1
0	1	1	1	1

Zakoni predstavljaju formule koje uvek imaju vrednost 1 u bilo kojoj od interpretacija *M* - uvek imaju vrednost 11 - na primer, *CpMp*.

Łukasiewicz je u svojim poznim godinama smatrao da ovde *M* izražava uobičajeno značenje reči 'moguće', ali ovo nije sasvim uverljivo. Sasvim izvesno da bismo se saglasili sa tim da što god *jeste* istinito *moglo bi biti* istinito (*CpMp*), ali matrica takođe potvrđuje, na primer, *CMpCMNpMq*, 'Ako je *p* moguće, tada ako je ne-*p* takođe moguće, moguće je i bilo šta, recimo *q*, što deluje krajnje problematično. Zapravo, obično 'Moguće *p*' shvatamo kao nešto što je manje u odnosu na čisto *p* (koje znači da *p* nije nešto što je tek moguće, već je ono činjenica), ali je i

više nego tek 'Ako *p* onda *p*' (koje je istinito i kada *p nije* moguće; na primer, ako 2 i 2 jesu 5, onda 2 i 2 jeste 5). Ali ovo 'moguće', koje ne tvrdi nešto što je između ovih ograničenja ali sama ova ograničenja tvrdi na način koji nije pregledan, nalik je 'mogućem' kojim se služi u odgovorima političara koji se nada da će ga neko od slušalaca shvatiti tako kao da je rekao 'da', dok će ga drugi shvatiti tako kao da o tome nije rekao baš ništa. Ovaj četvorovalentni sistem sadrži sve one čiste logičke stavove kojima bi se takav političar mogao provlačiti a da ostane neuhvatljiv (pretpostavlja se da je njegova upotreba 'mogućeg' konzistentna - na primer, kada kaže da 'Ako nije moguće ne-*p* onda je moguće *p*' ili 'Ako nije (ako ne-*p* onda ne-*p*) onda (ako *p* onda *p*)'). P.T. Geach je došao do toga da ga je moguće upotrebiti za ispitivanje logike koja važi za iskaze koje je Aristotel nazvao 'neodredenim', kao što je to 'Ljudi su neučtivi' koji nema indikator kvantiteta koji bi ukazao da li to znači da su svi ljudi neučtivi ili samo neki. Ako 'Ljudi su neučtivi' odredimo kao 'Neki su ljudi neučtivi, a moguće je da su to svi' u gornjem smislu reči 'moguće', ovaj Lukasiewiczev sistem, kombinovan sa standardnom logikom za 'svaki' i 'neki', omogućiće nam da nađemo upravo one zakone za koje se možemo pouzdati da se tiču 'neodređenosti'. Ljudska je komunikacija već takva kakva jeste, a zadatke poput ovoga vredi izvršavati.

Rose je pronašao upotrebu mnogovalentnog računa u oblikovanju sistema za signalizaciju. Razmišljalo se o tome da bi mnogovalentne logike mogle pojednostaviti i pojasniti kvantnu mehaniku, mada ove predloge fizičari još nisu ozbiljno razmotrili. Ono što se naslutilo, imajući na umu istorijska porekla mnogovrednosne logike, tiče se toga da bi ona bila zahvalna zbog znanog indeterminizma kvantne mehanike, ali sasvim moguće da pre može biti od pomoći, ako je to već tako, zbog njene moći (koja je ilustrovana u prethodnom paragrafu) da formalizuje rasuđivanje koje je moguće i onde gde je komunikacija nesavršena. Ili bi se možda njena upotreba sastojala, filozofski gledano, u demonstraciji toga da se ista logička sredstva mogu upotrebiti i u njenom kako sučeljavanju sa nesavršenom komunikacijom tako i sa neposrednim indeterminizmom.

Bibliografija

Aristotelov *De Interpretatione* je najbolje čitati u ediciji J.L. Ackrilla zajedno sa *Kategorijama* (Oxford, 1963), koja sadrži komentare Poglavlja 9 zajedno sa ukazateljima na rasprave koje se danas vode. O srednjovekovnim debatama pogledaj ediciju Philotheusa Boehnera o Ockhamovom delu *Tractatus de Praedestinatione et de Praesentia Dei et de Futuris Contingentibus* (St. Bonaventure, N.Y., 1945) a posebno *La Querelle des futurs contigents* L. Baudryja (Paris, 1945). Postoji veoma pažljiv pregled mogućih pozicija i argumenata u *Opusculum de Scientia Quam Deus Habet in Futuris Contigentibus*, Knjiga II, Francisca Suareza. Za savremeno razmatranje, sa postignutim formalizacijama, pogledaj "The Formalities of Omniscience", A. N. Priora, u *Philosophy* (April, 1962).

Detalji Łukasiewiczevih ranijih sistema dati su u *Logic, Semantic, Metamathematics*, Alfreda Tarskog (Oxford, 1956; Paper IV); njegovi kasniji četvorovalentni modalni sistemi nalaze se u "A System of Modal Logic"' *Journal of Computing Systems*, Vol. 1, No. 3 (July, 1953), koji su preštampani u njegovoj *Z Zagadnien Logiki i Filozofii* (Warsaw, 1961). Za detaljnije formalne probleme koji se javljaju u mnogovalentnim sistemima standardan tekst je *Many-valued Logics*, J.B. Rossera i A.R. Torquettea (Amsterdam, 1952).

O pojedinačnim primenama mnogo-valentnih logika pogledaj "Eight-valued Geometry", Alana Rosea, u *Proceedings of the London Mathematical Society* (1952), kao i "Applications of Logical Computers to the Construction of Electrical Control Tables for Signalling Frames", u *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 4 (1958); i A.N. Priorov članak "Curry's Paradox and Three-valued Logic", u *Australasian Journal of Philosophy*, Vol. 33 (December, 1955), 177-182, i "Notes on a Group of New Modal Systems", u *Logique et analyse*, No. 6-7 (April, 1959).

A. N. Prior

DEONTIČKA LOGIKA

Deontička logika, ili logika obaveze (the logic of obligation), predstavlja područje mišljenja unutar kojeg formulišemo i sistematizujemo takva načela kao što su da ništa ne može biti istovremeno obavezujuće i zabranjeno, kao i to što god da činimo izvršavajući nešto što je obavezujuće i samo jeste obavezujuće. Ona se razlikuje od etike po tome što se ne izjašnjava o pitanjima koja se tiču toga šta je zaista obavezujuće (stanovište po kojem je naša jedina dužnost da uvećamo zadovoljstvo i umanjimo bol pre bi bilo etičko stanovište nego neko koje potpada pod deontičku logiku), a isto tako i od čiste formalne logike po tome što formuliše načela koja su specifična kako za pojam dužnosti tako i za srodne probleme (na primer, načelo da što god je obavezujuće jeste obavezujuće može se ustanoviti izvan deontičke logike, budući da je to tek poseban slučaj uobičajenog logičkog načela po kojem sve jeste ono što jeste).

U prošlosti su načela deontičke logike bila iznošena tek usputno, u okviru moralne teologije ili kazuistike, ali čak se i tokom Srednjeg veka uvidelo da je logika onoga što je dopušteno i onoga što je obavezujuće na izvesne načine paralelna logici mogućeg i nužnog, kao i to da bi se ona mogla shvatiti kao nešto što potpada pod modalnu logiku u širem smislu. U modernim vremenima sistematsko bavljenje modalnom logikom prirodno je dovelo do pokušaja da se i deontičkom logikom služi na sličan način, kao što je to učinjeno 1926. u pokušajima E. Mallyja, kao i Kurta Grellinga i Karela Reacha, poznih 1930. Ekstenzivnija izučavanja bila su podstaknuta 1951. radom G.H. von Wrighta.

Deontička logika i modalna logika

Tipična načela modalne logike sastoje se u tome da ono što je nužno jeste moguće, da ono što je nemoguće jeste nužno neistinito i vice versa, kao i da ono što je nečim nužno uslovljeno i samo jeste nužno. Po analogiji, činilo bi se da ono što je obavezujuće jeste dopustivo, da smo dužni da ne činimo ono što je zabranjeno (nedopustivo) i vice versa, kao i da ono što izvršavamo na osnovu nečeg obavezujućeg jeste i samo obavezujuće. S druge strane, budući da što god je nužno jeste aktualno slučaj, a što god je aktualno slučaj jeste moguće, ne čini se da je istinito i to da što god je obavezujuće jeste aktualno učinjeno, a da što god da je aktualno učinjeno jeste dopušteno. Međutim, čini se da je istinito da treba da bude slučaj to da što god da je obavezujuće ujedno i bude učinjeno. Na taj način, mada ne posedujemo deontičku analogiju sa prostim 'Ako nužno *p* onda *p*', izgleda da imamo analogiju sa 'Nužno (ako nužno *p* onda *p*)'.

Na taj način se struktura deontičke logike pojavljuje nalik fragmentu formalne logike, a jednostavan način da se to i formalno predstavi sastojao bi se u tome da se preuzme neki sistem modalne logike, da se 'Nužno je slučaj da...' zameni sa 'Treba da bude slučaj da...', a 'Mogao bi biti slučaj da...' sa 'Dopušteno je da...', kao i da se izostave oni zakoni koji nakon ove transformacije ne uspevaju da zadrže svoje važenje.

Deontički sistem ove vrste na plodan način mogao bi biti proširen kako uvođenjem uobičajenih modalnih pojmova tako i deontičkih. Nakon toga možemo formulisati takva načela kao što je ono da stvar koja je obavezujuća mora biti moguća (ono što moram to i mogu), kao i to da bi ono što ne može biti učinjeno bez pomoći neke rdave radnje i samo predstavljalo rdavu radnju. Pošto je konverzija ovog poslednjeg načela takođe očigledno istinita (to jest, ono što bi i samo bilo rdava radnja ne može biti učinjeno a da pri tome ne bude učinjeno nešto - što je i samo - rdavo), ako uvedemo konstantan iskaz *S* za značenjem 'Nešto rdavo je učinjeno', tada možemo izjednačiti 'Zabranjeno je da *p*' sa 'Ne može biti slučaj da *p* a da ne bude i slučaj da *S*' - to jest, sa 'Ako *p* tada-nužno *S*'. Imajući u vidu ovu ekvivalenciju mnogi od tipičnih zakona deontičke logike lako se mogu izvesti iz zakona obične modalne logike.

Ta su izvođenja još jednostavnija ako uvedemo konstantu *E* sa značenjem 'ne-*S*' (t.j. 'Ništa rđavo se ne događa') i izjednačimo 'Treba da bude slučaj da *p*' sa 'Ako *E* tada-nužno *p*' (tj. Ako se ništa rdavo neće dogoditi, tada-nužno dogodiće se *p*'). Kao ilustraciju, razmotrimo načelo da ako treba da bude slučaj da *p*, tada ako treba da bude slučaj da ako-*p*-onda-*q*, onda treba da bude slučaj da *q*. Ako se 'treba' definiše kako je to predloženo, ovaj zakon predstavlja zapravo isto što i poseban slučaj sledećeg zakona modalne logike:

> Ako *r* nužno implicira na *p*, tada ako *r* takođe nužno implicira na *p* nužno implicira na *q*, tada *r* nužno implicira na *q*.

Poseban slučaj jeste onaj u kojem *r* predstavlja 'izbegavajući uslov' *E* (escape clause). Jedino značajno načelo deontičke logike koje nije na ovaj način svodivo na poseban slučaj običnih modalnih načela jeste zakon da što god je obavezujuće jeste dopustivo, ili da ništa nije istovremeno i obavezujuće i zabranjeno. Ono glasi:

> Ako *E* nužno implicira na *p*, onda *E* nužno ne implicira na ne-*p*.

Ako bi *E* imalo oblik '*p* i ne-*p*' ono *bi onda* istovremeno i nužno impliciralo *p* i nužno impliciralo ne-*p*, tako da bi u običnoj modalnoj logici ovaj zakon mogao imati izuzetke. Takvi izuzeci bi bili nedopušteni, dok bi sam zakon bio osnovan samo ukoliko bismo modalnoj logici, uz definiciju 'treba', dodali i aksiom koji bi sadržao to da *E* nije nemoguće - to jest da *možemo* izbeći izvršavanje radnje koja je rđava.

Ovaj način pojednostavljivanja deontičke logike pronašao je A.R. Anderson, koji ga je opet sam izveo iz sugestije H.G. Bohnerta o tome da se imperativne rečenice čiji je oblik 'Učini X' mogu shvatiti kao indikativne rečenice čiji je oblik 'Učinićeš X, ili u suprotnom' - to jest, 'Ako ne učiniš *X*, takva i takva nevolja će te snaći', ili 'Ako bi da izbegneš ovu nevolju, učinićeš X'. U svojem prvobitnom obliku Andersonova teorija je ovu sugestiju naprosto prenela na 'treba' i ustanovila da 'Obavezujuće je da *p*' znači 'Ako *p* nije učinjeno, onda-nužno biće primenjena neka sankcija ili kazna'. Ovo je podložno primedbi da, iako god da to bilo vredno sažaljenja, moguće je učiniti ono

što je rdavo ili propustiti ono što je obavezujuće, a pri tome još uvek izbeći kaznu. Međutim, suština Andersonskog sistema naprosto se sastoji u definiciji zabranjenog kao onoga što nužno implicira zbivanje izvesne loše stvari, dok detalji ostaju isti ma šta da se pod tom lošom stvari podrazumevalo. Zaista, kao što je to primetio T.J. Smiley, čisto logički interes Andersonovog sistema, posebno u obliku u kojem je obavezujuće definisano kao ono što je po nužnosti posledica 'uslova izbegavanja', sastoji se u prikazivanju određene logike koja govori o iznuđenosti putem nekog datog uslova, nasuprot logike koja se tiče proste nužnosti. Ovaj pojam je značajan čak i nezavisno od njegove moguće upotrebe u deontičkoj logici.

E.J. Lemmon i P.H. Nowell-Smith su tvrdili da je Andersonov način predstavljanja deontičke logike, čak i u njegovom najuspešnijem obliku, podložan sledećem prigovoru: Uzmimo bilo koji običan stav koji se tiče toga da je nešto obavezujuće - na primer, da je uvek obavezujuće uvećati zadovoljstvo i umanjiti bol, ili da upravo sada izvesna osoba treba da zatvori prozor. Uopšteno gledano, stavovi ove vrste pripadaju etici a ne logici. U nekoliko posebnih slučajeva oni mogu pripadati deontičkoj logici - to može biti istinito u slučaju stava koji tvrdi da je obavezujuće to da ono što je obavezujuće bude učinjeno - ali izvesno da oni ne pripadaju običnoj logici. S druge strane, stav da nešto nužno implicira nešto drugo *mogao bi se* shvatiti kao nešto što pripada običnoj logici. Ali Andersonski postupak poistovećuje svaku tvrdnju obavezivanja sa tvrdnjom nužne implikacije. Zbog toga izgleda da ovaj postupak zamagljuje granice koje dele etiku i logiku, te da na taj način čini ono što se nakon G.E. Moorea obično zove 'naturalistička greška'. Ova primedba bi mogla da se izrazi tako što bi se reklo da izvršavanje nečega što je zaista rđavo u određenom smislu implicira da je učinjeno nešto što je rđavo, ali samo u tom smislu da '*X* je učinjeno i *X* je rdavo' implicira da je učinjeno nešto rdavo; čisto '*X* je učinjeno' čak ako je *X* zaista rdavo, samo po sebi ne implicira da je i učinjeno nešto rđavo, a što bi trebalo da je slučaj onda kada '*X* je rđavo' znači 'Učiniti *X* implicira da je učinjeno nešto rdavo'.

Jedan od odgovora na ovu primedbu sastoji se u tome da se onome ko iznosi prigovor uputi protivprigovor da on sačini takve tvrdnje obavezivanja koje su samo empirijske ili

kontingentne. Ako neko ko upucuje prigovor ne želi to da učini - nekoliko filozofa čini upravo to - mora dopustiti da su tvrdnje obavezivanja i zabranjivanja, kada su istinite, nužno istinite, a da ako je nužno istinito da je rdavo učiniti *X*, tada je nužno istinito da ako je *X* učinjeno - da je učinjeno nešto rdavo. Ako ovo nije logička nužnost onda pored toga moraju postojati drugi oblici nužnosti, a zakoni modalne logike (kao što je taj da ono što je po nužnosti posledica nužne istine jeste i samo nužno) moraju važiti i za te druge vrste nužnosti, te se takođe na taj način mogu upotrebiti kako bi se logika obavezivanja izvela kao poseban slučaj nužne implikacije.

Gramatika stavova obaveze

U razvojnim koracima predmeta koji je upravo skiciran pretpostavljeno je da 'Obavezujuće je da ...' ili 'Treba da bude slučaj da ...' predstavlja izraz koji je pridodat rečenici, upravo na istovetan način kao što rečenici pridodajemo 'Nije slučaj da ...', ili 'Nužno je da ...', ili 'Navodno, ...', kako bi se pomoću njega obrazovala veća rečenica. Pridodata rečenica izražava ono *šta* o kojem se govori da je obavezujuće, dok cela rečenica tvrdi *da* je to obavezujuće. Neki pisci su ovom načinu konstruisanja stavova obaveze (obligation statements) prigovorili da se ono što je obavezujuće zapravo nikada ne odnosi na rečenicu, već na radnju (action). Pre će biti da se ovde radi o grubom nesporazumu. 'Nije slučaj da je trava zelena' nije stav koji se odnosi na rečenicu 'Trava je zelena', već predstavlja negativni stav o travi. Slično tome, 'Trebalo bi da bude slučaj da ti zatvaraš taj prozor' - to jest 'Treba da zatvoriš taj prozor' - nije neki stav o rečenici 'Ti zatvaraš taj prozor', već je složen stav o tebi i tom prozoru. Ono što je obavezujuće nije rečenica već ono što rečenica izražava, a to je neka radnja.

Međutim postoje mnogo ozbiljniji razlozi za razmatranje modifikacija gore izloženog postupka. Na prvom mestu, termin 'radnja' (action) je dvosmislen. On može značiti neko njeno pojedinačno izvršavanje (performance) u pojedinačnoj prilici, takvo kao što to ovde predstavlja Johnovo zatvaranje prozora, ili može značiti neki tip njenog izvršavanja, kao što bi to bilo uopšte zatvaranje prozora, ili davanje novca ljudima. I mada se čini da radnje u ovom prvom smislu mogu na odgovarajući način

biti opisane pomoću celovitih rečenica, radnje u drugom smislu nisu takve. Von Wrightov prvi deontički račun bio je oblikovan kako bi se rukovalo dužnošću, dopustivošću, itd., radnji u drugom smislu, kao i radnjama koje su na odgovarajući način simbolizovane slovima - *A*, *B*, *C*, itd. - a koje *nisu* tako shvaćene kao da stoje namesto rečenica. Tipovi radnji, kao i pojedinačni slučajevi radnji, mogu biti složeni: na primer, ako *A* predstavlja ´trči´ a *B* ´šeta´, ne-*A* će biti ´ne trči´, a *A*-ili-*B* će biti ´trči ili šeta´. Ali mi celovite rečenice nemamo sve dotle dok uz *A*, *B*, itd., ne dodamo *O* ili *D* (´jeste obavezujuće´, ´jeste dopustivo´).

Jedna od posledica ovoga postupka sastoji se u tome da oblik ´Ako je *A* obavezujuće, onda *A*´ neće predstavljati nešto nalik na ´Ako treba da bude to da Jones zatvara prozor, onda Jones zatvara prozor´, već pre nešto što liči na ´Ako je zatvaranje prozora obavezujuće, onda zatvaranje prozora´, pa je tako ovo načelo problematično ne kao nešto što je lažno već pre kao nešto besmisleno. Da bi izrazili ovu vrstu pogrešnog načela koje se tiče jezika, Robert Nozick i Richard Routley (sledeći u tome G.H. Hughesa) uveli su poseban operator koji znači da je neka radnja učinjena po kojem bi lažno načelo bilo prosto ´Ako je čin (act) tipa *A* obavezujući, onda je takav čin i učinjen´. Međutim, ako nastavimo putem kojim smo krenuli u poslednjem poglavlju ova komplikacija nije nužna. Ali u svakom slučaju čini se da je poželjno imati teoriju obaveznosti, itd., ´radnji´ u smislu njihovih pojedinačnih izvršavanja.

Čak i ako smo saglasni u tome da su deontički operatori na odgovarajući način pridodati rečenicama uverljivo je da oni nisu na primeren način pridodati svim rečenicama, zbog toga što mada neke rečenice opisuju radnje mnoge druge (na primer, ´2 i 2 jesu 4´) nisu takve. Ograničavanje deontičkih operatora na rečenice koje opisuju radnje može biti ugrađeno u deontički račun na različite načine. Sasvim razrađen mehanizam koji bi trebalo da vodi ovom cilju nedavno je razvijen kod von Wrighta u *Norm and Action*. Von Wright je prvi uveo oblik *pTq* kako bi izrazio transformaciju iz stanja stvari *p* u stanje stvari *q* (uključujući tu i poseban slučaj *pTp*, koje predstavlja održavanje stanja stvari *p*), kao i oblike *d*(*pTq*) i *f*(*pTq*), za izvršavanje takvih transformacija i uzdržavanje od njihovog izvršavanja. Deontički operatori, kao što su to *O* i *D*, bili bi primereni takvim *df*-rečenicama.

R.M. Chisholm je postupio na jednostavniji način. On dopušta da 'Treba da bude slučaj da ...' bude pridodato na bilo koju rečenicu, ali smatra da rečenice izražavaju radnje samo onda ako su obrazovane tako što je pred rečenice postavljeno '*x* se trudi da izvrši ...'. Tako se dužnosti u striktnom smislu izražavaju rečenicama koje imaju oblik 'Treba da bude slučaj da se *x* trudi da izvrši *p*'.

Još jedan način ograničavanja primene deontičkih operatora bio je predložen od strane izvesnih pisaca iz škole R.M. Harea. Ovaj predlog se sastoji u tome da se deontički operatori ne pridaju indikativnim, već imperativnim rečenicama. Kao kada bismo to što deontički logičar drži da je *O* čitali 'Treba da bude da ti ...' i usvajali ga kao nešto što je dobijeno iz imperativa 'Učini *X*' i od čega je obrazovana rečenica 'Treba da bude da ti učiniš *X*'. Ovako obrazovanu rečenicu H.-N. Castaneda shvata indikativnom po sebi; ona je u stvari tvrdnja o tome da je sama zapovest ispravna, ne u tom smislu da bi bilo rđavo izneveriti ono što ona zapoveda, već u tom smislu da bi bilo rđavo ne pokoriti joj se. (U prethodnom smislu ona bi glasila 'Treba da bude da zapovedaš *X*', koje bi bilo obrazovano od imperativa višeg reda 'Zapovedaj *X*'). Sledeći način obrazovanja indikativa iz imperativa sastoji se od postavljanja operatora 'Slučaj je da ti ...' kao prefiksa, čija snaga se sastoji u tome da se njime obrazuje tvrdnja koja govori o pokoravanju imperativu. Imperativi tako mogu biti u posebnom odnosu prema logici i to na dva načina: može biti reči o zakonu sistema koji se tiče njihove ispunjenosti, kao u slučaju imperativa 'Ili učini *X* ili nemoj', ili može biti reči o zakonu nekog sistema a koji se tiče njihove ispravnosti, kao u slučaju imperativa 'Ako treba da bude to da učiniš *X*, učini ga'. Zanimljivo svojstvo ovog deontičkog sistema sastoji se u tome što on ne sadrži analogiju sa modalnim načelom 'Ako nužno-*p* onda *p*' - zapravo sa maločas spomenutim logički ispravnim imperativom. Taj isti imperativ pojavljuje se u modifikaciji Castanedinog sistema, a koji su pružili Hare i Mark Fisher, u kojem 'Ti treba da učiniš *X*' samo po sebi nije indikativ već imperativ, koji je na isti način povezan sa samim 'Učini *X*' kao što je to 'Nužno *p*' sa samim *p*.

Čak i kada bismo zaobišli ova usložnjavanja i naprosto pridodali deontičke operatore indikativnim rečenicama kako bismo na taj način obrazovali druge indikativne rečenice, ostaje pitanje

da li pridodavanje operatora u osnovi treba da važi za jednu ili za dve rečenice. Na primer, Søren Hallden je razvio sistem u kojem je osnovni tip rečenice 'Bolje je ako *p* nego ako *q*', dok se 'Treba da bude slučaj da *p*' može definisati kao 'Bolje ako *p* nego ako ne-*p*'. S druge strane, von Wright ovo svrstava u 'logiku preferencije' budući da ono ne potpada u deontičku logiku, već pre u neku vrstu formalne teorije vrednosti. Ali čak i nezavisno od toga, deontička logika treba da rukuje pojmom moralne zapovesti. Pokušaji da se 'Čineći *X* nalaže se da se čini *Y*' definiše terminima proste obaveze (simple obligation) (na primer, kao kod 'Treba da bude tako da ako neko čini *X*, on čini *Y*', ili kao kod 'Ako neko čini *X*, treba da bude da čini *Y*') na različite načine su se dokazali kao nezadovoljavajući. Stoga su von Wright, Nicholas Rescher, kao i drugi, tragali za mogućnošću definisanja proste obaveze u terminima nedefinisane zapovesti, kondicionalne obaveze, ili kondicionalnog dopuštanja. Na primer, moglo bi se reći da je neko naprosto obavezan da čini ono što mu nalaže bilo koja radnja, ili ma koje stanje stvari. Chisholm definiše obavezu terminima pojma *p*-ovog 'zahtevanja' (t.j. iziskivanja, requiring) da *q*, ali Chisholmov sistem se najbolje može razmotriti nakon ispitivanja nekih od problema koji su njime podstaknuti.

Hintikkin paradoks

Deontička logika sa sobom nosi probleme koji se tiču ne samo njene gramatike, već takođe i njenog sadržaja. Na primer, mada se čini jasnim da ono što je obavezujuće mora biti moguće, pa prema tome ono što je nemoguće nije obavezujuće, možemo li reći, pored toga, da ono što je nemoguće nije čak ni dopustivo? Moralne intuicije mnogih ljudi o ovome nemaju mnogo toga da kažu, ali sledeći argument, čiji je suštinski oblik dao Jaako Hintikka, navodi na to da ono što nije moguće jeste pozitivno zabranjeno: Čini se da je jasno da bi (1) učiniti nešto što se samo ne može učiniti a da se time nije učinilo i nešto što je rđavo bilo i samo rđavo. Ali, (2) ono što uopšte ne može biti učinjeno, ne može biti učinjeno bilo da jeste ili da nije učinjeno nešto što je rđavo - ako je *X* nemoguće a *Y* rđavo, ne mogu učiniti ni *X* ni *Y*, niti učiniti samo-*X*-ali-ne-i-*Y* Ali na osnovu (1), ako je *Y* rđavo, a učiniti samo-*X*-ali-ne-i-*Y* jeste nemoguće,

onda je rđavo učiniti *X*. Stoga, (3) ako je nemoguće učiniti *X*, onda bi to bilo rđavo učiniti.

Postoji slučaj njegovog jednostavnog prihvatanja i to kao neobičnog, mada bezopasnog, usputnog proizvoda osnovanih temeljnih načela - bezopasnog zbog toga što ako je nešto nemoguće greh, onda je greh nešto što niko neće počiniti čak ni iz neznanja. Ono što ne može biti učinjeno neće biti učinjeno, bilo da to jeste rđavo učiniti ili da nije. Međutim, iz Hintikkinog načela, zajedno sa načelom da ono što je rđavo učiniti to je rdavo pokušati, sledilo bi da je rđavo čak i pokušati nešto što je nemoguće, što se čini daleko značajnijim i neizvesnijim zaključkom. Moglo bi se tvrditi da niko ne bi mogao pokušati nemoguće znajući da će to biti nemoguće (zato što niko ne bi mogao zamisliti bilo šta kao korak prema postignuću onoga o čemu je reč), kao što su isključeni i gresi koji bi bili počinjeni iz neznanja. Ali Roger White je oblikovao sledeći slučaj: Pretpostavi da logičar ne znajući da li izvesna formula sledi iz izvesnih aksioma provodi ceo dan pokušavajući da je izvede iz njih, a potom provodi ceo dan pokušavajući da pokaže da je nemoguće izvesti je iz njih. Ali bilo da je nemoguće izvesti ovu formulu ili da je nemoguće pokazati da ona ne može biti izvedena, tako u međuvremenu, do drugog dana, logičar će već znati da je ili prethodno pokušao nešto nemoguće ili da to čini sada. Bez sumnje da ovo nije sasvim isto kao i smerno pokušavati nemoguće, ali je tome dovoljno blisko, tako da odražava izvesnu sumnju u Hintikkin zakon.

Ako odbacimo Hintikkin zakon, moramo odbaciti neku od premisa iz kojih je on izveden - na primer načelo da ono što ne može biti učinjeno a da se pri tome ne učini nešto rđavo, jeste i samo rdavo. Možda istinito načelo nije ovo, već jeste to da ono što implicira rđavu radnju jeste samo po sebi rdavo, u smislu u kojem '*p* implicira *q*' pruža strožiju tvdnju od '(*p*-ali-ne-i-*q*) jeste nemoguće' (vidi Poglavlje *Modalna logika*). Ako je *p* nemoguće, onda svakako jeste nemoguće i (*p*-ali-ne-i-*q*), ali iz toga što je *p* nemoguće ne sledi, u ovom smislu reči 'implicira', da '*p* implicira *q*', tako da kada je Hintikkina premisa (1) ovako modifikovana, onda će analogna modifikacija njegove premise (2) biti pogrešna, a sa njom i njegov zaključak.

Međutim, prigovoru je podložno čak i načelo da ono što ne može biti učinjeno a da se pri tome ne učini nešto rđavo, jeste i

samo rdavo. Zato što kada sam na strani nekoga ko je napadnut to implicira (mada u tome ne učestvujem neposredno) da je osoba o kojoj je reč napadnuta, što implicira da je učinjeno nešto rdavo, pa bi tako, na osnovu ovoga načela, i moj stav bio sam po sebi rdav (ovo je poznato kao 'paradoks Dobrog Samaricanina'). Možda je istinito načelo naprosto to da ne treba istrajavati na onom što ne treba da se dogodi.

Takođe je bilo predloženo da Hintikkin paradoks možemo izbeći na taj način što ćemo reći da deontički stavovi o onome što je nemoguće jednostavno nemaju smisla, zato što mi zapravo prave rečenice obrazujemo tako što pridajemo deontičke operatore drugim rečenicama samo onda kada ove poslednje rečenice opisuju ne samo radnje već i one radnje koje su moguće. Međutim, ovakvo vladanje bi u potpunosti učinilo nemogućim razvoj deontičke logike na bilo koji sistematski način. Po svoj prilici bilo šta što je u kontradikciji sa logičkom teoremom jeste nemoguće, tako da ne možemo znati da li deontički operator možemo pridati nekom sadržaju sve dok ne saznamo šta sve predstavlja logičke teoreme; međutim, mi možemo razviti logičke teoreme samo ako ih možemo formulisati, a možemo ih formulisati samo ako već znamo kojim sadržajima možemo pridodati deontičke operatore.

Logika zahteva

Drugi problem koji se tiče sadržaja deontičke logike zapazio je R.M. Chisholm u vezi s onim što on naziva 'imperativi koji stoje nasuprot dužnosti' (contrary to duty imperatives - fraza je skovana po analogiji sa 'protivčinjeničkim uslovima', tj. 'contrary-to-fact-conditions'), takvih dužnosti kao što je izvinjavanje i pružanje nadoknada (making amends) na koje smo prinuđeni time što smo propustili da učinimo neku drugu dužnost. Kako Chisholm naglašava, razložnim se čini sledeće načelo:

(1) Ako treba nešto da činimo, recimo *X*, i ako treba da bude slučaj to da ako činimo *X* činimo i *Y*, tada treba da činimo *Y*.

Ali pretpostavimo da

(2) Treba da činimo *X* - na primer da odemo susedu u pomoć - ali, zapravo

(3) Ne činimo *X*.

Pretpostavimo dalje da

(4) Treba da bude tako da ako činimo *X*, da činimo i *Y* - ako ćemo pomoći susedu mi ćemo mu saopštiti da ćemo to i učiniti - ali da

(5) Ako mi zaista ne činimo *X*, ne treba da činimo i *Y* - ako nećemo pomoći našem susedu ne treba ni da mu saopštavamo da ćemo to učiniti.

Po načelu (1), iz (2) i (4) očito sledi da treba da učinimo *Y* - to jest da saopštimo susedu da ćemo mu priteći u pomoć. Međutim, iz (3) i (5) sledi da ne treba da činimo *Y* - to jest da bi bilo pozitivno rđavo reći našem susedu da ćemo mu priteći u pomoć. Stoga, u takvoj prilici jedna i ista stvar je i obavezujuća i zabranjujuća, što je nasuprot najosnovnijim načelima deontičke logike.

Zaključak koji Chisholm izvodi jeste da se postojeći sistemi deontičke logike moraju radikalno rekonstruisati i izgraditi na pojmu onoga što on naziva 'zahtevom' (requirement). U skiciranju ove rekonstrukcije prvo možemo zapaziti da je, čak nezavisno od gornjeg argumenta, načelo da ništa ne može biti istovremeno i obavezujuće i zabranjeno obično bilo kritikovano kao nešto što je prividno u neskladu sa postojanjem 'sukoba dužnosti'. Inkonzistencija je otklonjena kada razlikujemo, slede-ći u tome W. D. Rossa, prima-facie od aktualnih dužnosti, ili, kao što se to ponekad drži, kada razlikujemo polaganje prava na nešto od samih obaveza. Različita svojstva okolnosti koje nas okružuju pružaju povod na polaganje različitih prava, ili za dužnosti prima-facie, a one zaista mogu biti u neskladu. Ali u bilo kojoj datoj prilici ipak postoji, tako reći, ishodište ovih prava, a to predstavlja ono što mi zaista treba da učinimo u toj prilici. Upravo s obzirom na tu ishodišnu obavezu možemo reći da ono na šta smo obavezni da izvršimo - ne možemo takođe i ne biti obavezni da to izvršimo.

Ono što Chisholm smatra pod 'zahtevom' jeste relacija između pojedinačnog svojstva naših okolnosti i otuda proizišlih prava. Ako se bitno svojstvo naših okolnosti izrazi pomoću rečenice *p*, a pomoću *q* prima-facie dužnosti koje otuda proizilaze, temeljni oblik njegove deontičke rečenice nije 'Treba da bude da *q*', već '*p* zahteva *q*', ili tačnije '*p* bi, ukoliko je prisutno,

zahtevalo *q*. A reći da data situacija zahteva *q*, jeste naprosto isto što i reći da za neko *p*, *p* bi zahtevalo *q*, kao i da je *p* slučaj. Ako smo navedeni na pomisao da ako *p* zahteva *q*, tada bi bilo šta što implicira *p*-i-*r* takođe impliciralo *q*, ali to nije tako, zato što zahtevi mogu biti prenebregnuti dodatnim svojstvima situacije. Može se dogoditi da *p* zahteva *q*, ali da *p*-i-*r* ne zahtevaju *q*. Reći da je *q* apsolutno obavezujuće, da naprosto treba da bude slučaj da *q*, znači isto što i reći da za neko *p*, kada *p* jeste slučaj, da *p* zahteva da *q*, kao i da ovaj zahtev nije prenebregnut (t.j., da ne postoji nijedno *r* takvo da je *r* slučaj, kao i da *p*-i-*r* ne zahteva *q*). Obično će zahtev koji je prenebregnut s obzirom na dodatna svojstva neke situacije biti smenjen nekim drugim zahtevom. Ako je istovremeno slučaj da *p*, *r*, i *s*, može se dogoditi da *p* zahteva *q*, da ga *p*-i-*r* ne zahteva, a da ga *p*-*q*-*s* zahtevaju. Dalje, isto tako, da ga *p*-i-*r*-i-*s*-i-*t* ne moraju zahtevati. Ali ako je *q* apsolutno obavezujuće, mi ćemo pre ili kasnije postići takav opis situacije koji je dovoljno obuhvatan za zahtevanje *q* i koje neće biti prenebregnut ničim dodatnim. U krajnjem slučaju to će obuhvatiti 'sve što je slučaj', ali obično možemo očekivati da se moralne oscilacije zaustave i pre nego što se ode toliko daleko. Može se čak dogoditi, kao što to moralisti misle, da postoje neki sasvim pregledni zahtevi (na primer, nemoj nikoga mučiti) koje ne može da prenebregne nikakvo gomilanje okolnosti.

Bibliografija

Glavni von Wrightovi doprinosi nalaze se u *An Essay in Modal Logic* (Amsterdam, 1951; Ch. 5) i *Norm and Action* (London, 1963). Za ranija izučavanja deontičke logike pogledaj Kurt Grelling, 'Zur Logik der Sollsatze', u *Unity for Science Forum* (January, 1939; 44-47); i Karel Reach, "Some Comments on Grelling's Paper 'Zur Logik der Sollsatze'" u *Unity for Science Forum* (April, 1939; 72).

Stanovišta A.R. Andersona su razvijena u *The Formal Analysis of Normative Systems*, Technical Report No.2, U.S. Office of Naval Research Contract No. SAR/Nonr-609 (116)(1956), a o kojem je izvešteno u A.N. Priorovoj knjizi *Time and Modality* (Oxford, 1957) i 'Escapism: The Logical Basis of Ethics', *Essays in Moral Philosophy*, A.I. Melden ed. (Seattle, 1958; pp. 135-146); u P.H. Nowell-Smith i E.J. Lemmon

'Escapism: The Logical Basis of Ethics', *Mind*, Vol. 69 (1960), 289-300; kao i T.J. Smileyevom 'Relative Necessity', *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 28. (1963; 113-134).

O sintaksi deontičke logike pogledaj Robert Nozick i Richard Routley, 'Escaping the Good Samaritan Paradox' u *Mind*, Vol. 71 (1962; 377-382); A.N. Prior 'The Done Thing' u *Mind*, Vol. 73 (1964; 441-442); H.-N. Castaneda, 'Un sistema general de logica normativa' u *Dianoia*, Vol. 3 (1957; 303-333), i 'The Logic of Obligation' u *Philosophical Studies*, Vol. 10, No. 2 (February 1959), 17-23; i Rose Rand, 'The Logic of Demand-sentences', u *Synthese*, Vol. 14 (1962).

Za sisteme koji sadrže 'bolje od' kao primitivne simbole vidi Søren Hallden, *The Logic of Better* (Copenhagen, 1957), i G.H. von Wright, *The Logic of Preference* (Edinburgh, 1963).

Chisholmovi glavni doprinosi nalaze se u 'Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic', *Analysis*, Vol. 24 1963; 33-36) i 'The Ethics of Requirement', *American Philosophical Quarterly*, Vol. 1, No. 2 (April, 1964; 1-7).

Veći broj značajnijih problema razmotren je u Georeges Kalinowski *Introduction a la logique juridique* (Paris, 1965).

John van Heijenoort

LOGIČKI PARADOKSI

Paradoks je, u izvornom smislu reči, stav koji stoji nasuprot opšteprihvaćenom mišljenju. Ova reč je u logici preuzeta sa određenijim značenjem. Logički paradoks se sastoji od dva kontrarna, ili čak kontradiktorna, stava na koje nas navode prividno osnovani argumenti. Ovi se argumenti smatraju osnovanim zbog toga što, kada su upotrebljeni u drugim kontekstima, oni deluju tako kao da ne predstavljaju bilo kakvu teškoću. Tek u pojedinačnoj kombinaciji u kojoj se paradoks događa ovi argumenti navode na problematičnu konkluziju. U svojem krajnjem obliku, paradoks se sastoji od prividne ekvivalencije dva iskaza od kojih je jedan negacija drugog. Ako za neki iskaz A

$$A \supset \neg A$$

ovo samo po sebi jednostavno navodi na dokaz $\neg A$, na osnovu validnog zakona iskaznog računa:

$$(A \supset \neg A) \supset \neg A.$$

Ako imamo

$$\neg A \supset A$$

ovo onda utvrđuje A. Tako, iz

$$A \equiv \neg A$$

dobijamo A i $\neg A$. Ovaj krajnji oblik paradoksa ponekad se zove antinomija.

Značajniji paradoksi

Grčka filozofija poznaje paradoksalne argumente Zenona iz Eleje, koji su bili dati sa namerom da se pokaže nerealnost kre-

tanja. Danas, sa našim poznavanjem beskonačnih nizova, trka između Ahila i kornjače daleko nas teže može zbuniti. Zanimanje za paradokse negovali su Megarani. Neke od njihovih aporija, kao što je to Gomila ili Ćelavi, odnose se na problem neodređenosti i danas se više ne shvataju kao logički paradoksi. Ali jedan od njih, Lažac, koji je pripisan Eubulidu, za nas je još uvek u velikoj meri izazovan: "Čovek kaže da laže. Da li je ono što govori istinito ili lažno?"

Srednjovekovni logičari pokazali su veliko zanimanje za *insolubilia*, ali ovaj interes je zamro nakon Pavla iz Venecije (koji je umro 1429). Kantove antinomije, opet, bave se pre epistemološkim nego logičkim problemima.

Burali-Fortijev paradoks. Sa ponovnim oživljavanjem logike u drugoj polovini devetnaestog veka pažnja logičara nanovo je usmerena na paradokse. Prvi objavljen moderan paradoks bio je onaj Cesare Burali-Fortija (*Una questione sui numeri transfiniti* i *Sulle classi ben ordinate*). To je paradoks o najvećem ordinalu. U teoriji skupova Georga Cantora svakom dobro uređenom skupu pripisan je ordinalni broj. Ovi ordinali mogu se porediti: od bilo koja dva jedan je veći a drugi manji. Štaviše, svaki skup ordinala, kada je uređen u skladu sa ovom relacijom poretka, jeste dobro uređen a njegov ordinal je veći od bilo kojeg elementa tog skupa. Neka O bude skup svih ordinala. On je dobro uređen, pa prema tome on ima ordinalan broj, ω. Tako, s jedne strane ω je element iz O; s druge strane, ω je veći od bilo kojeg elementa iz O.

Sam prikaz koji je pružio Burali-Forti bio je nejasan zbog nedovoljno dobrog razumevanja Cantorovog pojma dobro uređenog skupa, ali ovo pogrešno razumevanje lako se može preurediti tako da paradoks tada počiva u svojoj punoj snazi. Sam Cantor je pronašao ovaj isti paradoks 1895. i saopštio ga je Davidu Hilbertu 1896. (vidi P.E.B. Jourdain, *On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates*, p.70).

Cantorov paradoks. Sledeći paradoks koji se dotiče pojmova teorije skupova jeste onaj o najvećem kardinalu. Svakom skupu odgovara neki kardinalni broj. Za bilo koja dva skupa A i B kardinalni broj za A je manji od kardinalnog broja za B ako i samo ako je A ekvivalentno podskupu B a B nije ekvivalentno podskupu A. Jedan od temeljnih Cantorovih rezultata na polju

teorije skupova jeste da se za bilo koji skup A, skup podskupova iz A, moć skupa $\wp A$, nije ekvivalentano sa A, dok je A ekvivalentno podskupu $\wp A$. Prema tome, kardinalan broj za A manji je od kardinalnog broja za $\wp A$. Neka je S skup svih skupova. Njegova moć skupa, $\wp S$, ima veći kardinalni broj i sadrži više skupova nego S, dok su, s druge strane, u S sadržani svi skupovi. Ovaj paradoks Cantor je saopštio Richardu Dedekindu u pismu datiranom 31. avgusta, 1899. (*Gesammelte Abhandlungen*, s.448) i danas je on poznat kao Cantorov paradoks.

Russellov paradoks. Na prelazu stoleća paradoksi Burali-Fortija i Cantora predstavljali su predmet žive rasprave među matematičarima koji su se bavili teorijom skupova. Juna 1901 Bertrand Russell, razmatrajući ova dva paradoksa i analizirajući njihovu strukturu, došao je do novog paradoksa, onog o skupu svih skupova koji ne sadrže sami sebe kao elemente. Skup r, "Russellov skup", određen je sledećim uslovom:

za svako x, $x \varepsilon r$ ako i samo ako $x \not\varepsilon x$.

Pomoću zamene dobijamo

$r \varepsilon r$ ako i samo ako $r \not\varepsilon r$.

Russellov paradoks značajan je zbog činjenice da se služi samo pojmovima 'skup' i 'element skupa'. Paradoksi Burali-Fortija i Cantora mogu biti pripisani tehničkim teškoćama Cantorove teorije skupova; zbog toga se činilo da oni predstavljaju pre problem koji se tiče matematičara nego logičara ili filozofa. Međutim, Cantorova teorija bila je predmet mnogih kritika, nezavisno od ovih paradoksa.

Sa Russellovim paradoksom situacija je sasvim drugačija. On barata ogoljenim pojmovima skupa i elementa, a ne novim i možda sumnjivim rezultatima koji se tek posredno odnose na skupove. Russell je ovaj paradoks saopštio Fregeu u pismu od 16. juna 1902. (John van Heijenoort, *A Source Book in Mathematical Logic*). Frege je odmah odgovorio (22. juna 1902, *ibid.*), tvrdeći da je otkriće ovoga paradoksa uzdrmalo temelj sistema logike na kojem je on nameravao da izgradi aritmetiku.

'Kontradikcija', kako je Russell nazvao svoj paradoks, razmatra se u Poglavlju 10 u *The Principles of Mathematics*. Taj deo, koji je očigledno pisan 1901, predlaže da se između klase i

elemenata klase načini razlikovanje u tipu i ujedno iznosi tvrdnju da to predstavlja "ključ cele ove misterije u razlikovanju logičkih tipova" (*Sect.* 104). Pre nego što je ova knjiga objavljena, Russell je osetio da ovaj problem zaslužuje veću pažnju i napisao je Dodatak B, čija dužina je gotovo šest stranica, u kojem je učenje o tipovima "probno" izloženo, pošto "pre nego što pruži odgovore na sve teškoće, po svemu sudeći, ono iziskuje da bude preobraženo u tananije obličje". U *The Principles of Mathematics* Russell se takođe bavi i Burali-Fortijevim paradoksom, koji on pokušava da reši pobijajući to da je skup svih ordinalnih brojeva dobro uređen.

Decembra 1905. (*On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*) Russell je napustio teoriju tipova; da bi se paradoksima teorije tipova pristupalo na približno ujednačen način on je predložio tri teorije: (1) *cik-cak teoriju*, (2) *teoriju ograničenja veličine*, (3) *teoriju praznih klasa* (the no-classes theory).

Russellov paradoks nestao bi ako bi iskaznoj funkciji $x \varepsilon x$ odgovarala prazna klasa r tako da

$$(x)(x \varepsilon r. \equiv x \varepsilon x)$$

tako da svaka iskazna funkcija ne bi određivala klasu. U cik-cak teoriji iskazna funkcija ne određuje klasu ako je funkcija "komplikovana i teško razumljiva". Problematične klase prestaju da postoje, ne zbog toga što bi one bilo isuviše "velike" već zato što bi pokazivale izvestan cik-cak kvalitet (x je u r ako i samo ako x nije u x, što je sličan slučaj i kod nekih Cantorovih argumenata). Za iskaznu funkciju koja određuje klasu kaže se da je predikativna i Russell predlaže da se obrazuju aksiomi koji bi odlikovali predikativne iskazne funkcije. Ali on je ipak morao priznati da u pokušaju da se to učini nije pronašao "nijedno rukovodeće načelo sem izbegavanja kontradikcija; a to je, samo po sebi, sasvim nedostatno načelo pošto nas uvek stavlja pred opasnost da će dedukcije koje dalje slede navesti na kontradikciju".

U teoriji ograničenja veličine provera predikativnosti se više se ne sastoji u jednostavnosti u formi već u izvesnom ograničenju u pogledu veličine. Klase prestaju da postoje ako bi bile isuviše "velike". Na primer, ordinali ne obrazuju klase pa tako iščezava Burali-Fortijev paradoks. Međutim, Russell je uvideo teškoću toga gde se zaustaviti na skali ordinala.

U teoriji praznih klasa se ne pretpostavlja to da iskazne funkcije određuju klase i relacije. Iskazi o klasama i relacijama preoblikovani su u fraze date terminima iskaznih funkcija. Mada ovu reinterpretaciju nije moguće dopustiti za celu teoriju ordinalnih brojeva Russell je utvrdio da je to moguće u uobičajenoj matematici. Međutim, ova rekonstrukcija je teška i iscrpljujuća.

Russell je predstavio ove tri teorije a da pri tome nije neposredno usvojio nijednu od njih. Ali u belešci, koja se sastoji od tri reda teksta, datiranoj na 5. februar 1906., on se tim povodom izjasnio da trenutno ne oseća "bilo kakvu sumnju u to da teorija praznih klasa pruža potpuno rešenje svih teškoća" izazvanih paradoksima. Međutim, to nije konačno rešenje koje je usvojio. On se vratio na teoriju tipova, tek grubo skiciranu 1903, koju je 1908. predstavio u sasvim razvijenom obliku (*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*). Dve godine kasnije ova teorija je bila inkorporirana u *Principia Mathematica*. Pre nego što objasnimo šta predstavlja ova teorija, nastavićemo sa našim istorijskim izlaganjem o paradoksima.

Richardov paradoks. Godine 1905, Jules Richard, profesor dižonskog liceja, objavio je novi paradoks (*Les Principes des mathêmatiques et le probleme des ensembles*), koji se tiče definicija realnih brojeva: Uzmi sve konačne sekvente, sa mogućim ponavljanjima, sačinjene od 26 slova alfabeta (plus broj tipografskih znakova). Zapiši ove sekvente u tablicu shodno tipografskom redosledu; to jest, od dva sekventa nejednake dužine kraći dolazi prvi, a za bilo koja dva sekventa iste dužine poredak je određen alfabetskim redosledom njihovih slova. Izostavi bilo koji sekvent koji ne predstavlja definiciju realnog broja. Dobijamo prebrojivo mnogo takvih definicija i skup konačno odredivih realnih brojeva je prebrojiv. Sada uzmi sledeću rečenicu: "Neka *d* bude realan broj čiji integralni deo je 0 a čije *n*-to decimalno mesto je 1 ako je *n*-to decimalno mesto *n*-tog broja u tablici 0, dok je u suprotnom slučaju 0". Rečenica pod znacima navoda određuje realan broj, stoga treba da se nađe u tablici, a broj *d* bi trebalo da bude odrediv; s druge strane, *d* je različito od bilo kojeg broja koji se u tablici pojavljuje.

Zermelo-Konigov paradoks. Gotovo u isto vreme kada je objavljena Richardova beleška Julius König predstavio je javnosti paradoks koji sadrži izvesnu analogiju sa Richardovim. Kao i

Richard, König se bavio skupom konačno odredivih (definable) realnih brojeva, ali namesto upotrebljavanja dijagonalne konstrukcije utvrdio je komplement tog skupa. Pošto postoji neprebrojivo mnogo realnih brojeva a samo prebrojivo mnogo konačno odredivih realnih brojeva - taj komplement nije prazan. Ako bi skup realnih brojeva mogao da bude dobro uređen, skup realnih brojeva koji nije konačno odrediv takođe bi mogao da bude dobro uređen i imao bi prvi element koji bi stoga bio konačno odrediv. Ovaj prvi element komplementa bi u isto vreme bio i konačno odrediv i ne bi bio konačno odrediv. Odavde je König izveo konkluziju da skup realnih brojeva ne može biti dobro uređen, dovodeći to u kontradikciju sa rezultatom koji je neposredno pre toga dobio Zermelo (*"Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann"*). Nakon otkrića Richardovog paradoksa, u kojem problem dobrog uređenja ne igra nikakvu ulogu, Königova konkluzija teško može biti prihvaćena. Pre bi se to moglo reći da uzimajući kao validan Zermelov rezultat da skup realnih brojeva može biti dobro uređen, izvodimo postojanje prvog elementa u komplementu skupa konačno odredivih realnih brojeva, pa tako imamo paradoks koji se tiče pojma *odredivosti* (definability) koji se ponekad naziva Zermelo-Königov paradoks.

Berryjev paradoks. Berryjev paradoks koji je objavio Bertrand Russell (*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, p.223) u vezi je i sa Richardovim i sa Königovim. Ime bilo kojeg celog broja ima izvestan broj slogova i samo konačan broj takvih imena se može obrazovati od datog konačnog broja slogova. Prema tome "najmanji ceo broj koji nije moguće imenovati sa manje od tačno trideset slogova" označava određeni ceo broj. Ali fraza u navodnicima jeste ime koje se sastoji od 29 slogova, pa je tako najmanji ceo broj koji nije moguće imenovati sa manje od 30 slogova imenovan sa 29 slogova. Paradoks se može preoblikovati u frazu koja kao termine sadrži reči, a ne slogove: usvojen je određen leksikon i mi utvrđujemo definiciju prirodnih brojeva koji sadrže, recimo, 50 ili manje reči. U jednom ili drugom obliku formulacija Berryijevog paradoksa jednostavna je i ne iziskuje upotrebu pojmova teorije skupova.

Grellingov paradoks. Kurt Grelling je 1908. predstavio nov paradoks, o 'heterologičnosti' (*Bemarkungen zu den Paradoxien*

von Russell und Burali-Forti). Za reč se kaže da je "autologična" ako i samo ako se primenjuje na sebe - to jest ako zadovoljava shemu " *'w'* je *w*". Primeri autologičnih reči jesu "srpski", "kratak", "višesložan". Ako reč nije autologična onda je ona "heterologična". Primeri heterologičnih reči su "francuski", "beskoristan", "jednosložan". Pogledajmo sada da li je reč "heterologično" heterologična? Ako pretpostavimo da je "heterologično" heterologično onda, na osnovu gornje sheme, "heterologično" je autologično; s druge strane, ako pretpostavimo da je "heterologično" autologično, tada po definiciji za "autologično", "heterologično" je heterologično.

Otprilike u isto vreme, paradoks Lažac, čije datiranje seže sve do Megarana, bio je sve više i više pominjan i razmatran, tako da je postao predmet knjige Alexandera Rüstowa *Der Lügner: Theorie, Geschichte und Auflosung** .

Teorija tipova

Paradoksi koji su do sada pomenuti predstavljaju one koji su u najvećoj meri uticali na razvoj logike. Oni su u logici doveli do dva veoma značajna doprinosa - teorije tipova i aksiomatizacije teorije skupova - i u izvesnoj meri potpomogli pojavu L.E.J. Brouwerovog intuicionizma.

Prosta teorija tipova. Teoriju tipova je izložio Russell u *Mathematical Logic as Based on the Principle of Types* i ona je postala integralni deo *Principia Mathematica.* Njena osnovna ideja je razlikovanje između predikata i predikata predikata. Predikat važi za individue; predikat predikata važi za predikate individua, ali mi ne možemo smisleno tvrditi da on važi ili ne važi za individuu ili individue. Ako pratimo ovu ideju navedeni smo na to da pravimo razlikovanje predikata na različitim nivoima. Na primer, ne možemo ustanoviti hijerarhiju jednostavno koristeći brojeve 0, 1, 2, ..., zato što predikatska slova imaju

* Od pisanja ovog članka do danas je izašao veoma veliki broj tekstova i knjiga koji se bave paradoksima, a posebno Lašcem, od kojih bi svakako trebalo spomenuti knjigu W.V. Quinea *The Ways of Paradox and Other Essays*, Harward, 1976 (revised edition), kao i nedavno objavljeni zbornik R.L. Martina (ed.) *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Oxford University Press, 1984. -prim. prev.

različit broj mesta argumenta a shema mora biti ujednačena. Mi pripisujemo tip *i* individualnim varijablama ili konstantama, tip (*i*) singularnoj predikatskoj varijabli ili konstanti, tip (*i,i*) binarnoj predikatskoj varijabli ili konstanti. Predikatska varijabla ili konstanta čije prvo mesto argumenta se može ispuniti varijablom tipa (*i*) a drugo i treće varijablama tipa *i* biće tipa ((*i*),*i,i*). Na ovaj način tip je pripisan svakoj varijabli ili konstanti. Formula $x_\beta(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, ..., x_{\alpha n})$, gde su x_β, $x_{\alpha 1}$, $x_{\alpha 2}$, ..., $x_{\alpha n}$ varijable ili konstante tipa β, α_1, α_2, ..., α_n, u skladu s tim, jeste dobro obrazovana ako i samo ako je β tačno (α_1, α_2, ..., α_n). Iz ovih atomičkih dobro obrazovanih formula putem istinosnih funkcija i kvantifikacije dobijaju se ostale dobro obrazovane formule tog sistema. Kada su jednom u sistem logike uvedeni tipovi, u sistemu ne može biti reprodukovana analogija Russellovom paradoksu predikata, zato što $x_\alpha(x_\alpha)$, za bilo koji tip α, nije dobro obrazovano.

Razgranata teorija tipova. Da bi se bavilo Lašcem i Richardovim paradoksom Russell je našao shodnim da je neophodno uvesti dodatno razgraničenje, koje se tiče poretka unutar svakog tipa, te je na taj način dobio ono što je postalo poznato kao razgranata teorija tipova (ramified theory of types). Prvo, određujemo *nivo* tipa. Tip *i* spada u nivo 0, tipovi (*i*), (*i,i*), (*i,i,i*),... spadaju u nivo 1, tipovi ((*i*)), ((*i,i*)), ((*i,i,i*)),... spadaju u nivo 2, i tako dalje. Nivo tipa dat je na osnovu broja obuhvatajućih parova zagrada. Nivo je na neki način u srazmeri sa složenošću tipa, ali za svaki nivo iznad 0 postoji neograničeno mnogo tipova. Russellovo predstavljanje razgranate teorije tipova trpi od nekoliko nedostataka, koji se pre svega sastoje u zbrci između notacije i objekata za koje se pretpostavlja da ih ta notacija označava. Rekonstrukcija Russellove teorije bi iziskivala pružanje doslednog opisa nekog formalnog sistema, što izlazi iz dosega onoga čega smo se ovde poduhvatili. Zato ćemo naprosto uzeti jedan primer. Uzmi otvorenu formulu

(1) $(x_{(i)})x_\beta(x_{(i)}, x_i)$

pri čemu β jeste ((*i*),*i*), što spada u nivo 2. Doseg slobodne varijable x_i jesu individue; kada se neki predikat pridoda na x_{i}, formula je istinita za neke individue, a lažna za druge, pa tako

korespondira sa predikatom individua koji je singularan. Medutim, time što ona sadrži tip čiji je nivo 2 ona se razlikuje od formule

(2) $y_{(i)}(x_i)$,

koja takođe korespondira takvom predikatu zato što u (2) najviši nivo iznosi 1. Određenije rečeno, formula (1), čija svrha jeste da pokaže odlike predikata tipa (*i*), sadrži kvantifikator, naime $(x_{(i)})$, čijim dosegom su obuhvaćeni svi takvi predikati. U ovome je Russell video proboj načela circulus viciosus (koji je ponekad izražavao kao: nijedan totalitet ne može sadržati članove koji su određeni sopstvenim terminima) i uveo je razlikovanje medu porecima (orders) između predikata tipa (*i*) koji je određen pomoću (1) i predikata tipa (*i*) koji je određen pomoću (2).

Neka *F* bude neka otvorena dobro obrazovana formula koja sadrži kao argument tačno slobodnu varijablu x_α, a neka *k* bude onaj nivo u koji spada α. Ako *F* ne sadrži nijedan kvantifikator koji vezuje varijablu nivoa koji je veći od *k*, tada se kaže da *F* spada u poredak 1, ili da je 'predikativna'. Ovo je slučaj kod formule (2). Ako *F* sadrži kvantifikator koji vezuje varijablu nivoa $k + l$, gde je $l < 1$, a nijedan kvantifikator ne vezuje varijablu višeg nivoa, kaže se da *F* spada u poredak $l + 1$ i da je 'impredikativna'. Formula (1) sadrži kvantifikator nivoa 1, dok je α nivoa 0; tako ona spada u poredak 2 i impredikativna je. Mogu se dati analogne definicije za formule koje kao argument sadrže više od jedne slobodne varijable, mada njihove dosledne formulacije tada postaju složenije.

Russell je ustanovio da razlikovanje poredaka razrešava paradoks Lažac, kao i paradokse Richarda i Berryja. Što se Lašca tiče, kazivanje lašca će biti razabrano shodno porecima koje sadrži. Richardove 'definicije' i Berryjeva 'imena' takođe će biti razvrstani unutar različitih poredaka, a kada je totalitet definicija ili imena jedanput razvrstan unutar poredaka, paradoksi se ne mogu ponoviti. Međutim, ovo dovodi do toga da bi neki takav jezik bio krajnje težak; on bi zabranjivao potpunu formulaciju, čak i ako zanemarimo sam dokaz, važnih teorema matematike, takvih kao što je ona teorema računa koja tvrdi da ako neprazan skup realnih brojeva ima gornje ograničenje - da ima najmanje gornje ograničenje.

Da bi otklonio ova ograničenja Russell uvodi aksiomu redukcije (reducibility, svođenje), koja tvrdi da za svaku iskaznu funkciju postoji ekvivalentna predikativna iskazna funkcija. Za formulu (1), gore, aksioma bi bila

$$(\exists y_{(i)})(x_i)(y_{(i)})(x_i) = (x_{(i)})x_\beta(x_{(i)},x_i).$$

Aksioma je sve drugo samo ne očigledna. Ona obnavlja nešto od moći koju je sistem izgubio uvođenjem poredaka. U stvari, ona obnavlja tačno toliko te moći da postaje problematično da li je išta ostalo od razlikovanja poredaka (vidi W.V. Quine, *On the Axiom of Reducibility*). Dole je pokazano kako nam Remseyeva sugestija dopušta da izbegnemo i poretke i aksiomu redukcije.

Aksiomatizacija teorije skupova

Sa određenim opravdanjem se može tvrditi da razlikovanje među tipovima otelovljuje nešto od naših logičkih intuicija i trebalo bi da u logiku bude uvedeno nezavisno od paradoksa. U stvari, Ernst Schroder je 1890. anticipirao teoriju tipova mada on uopšte nije bio usredsređen na paradokse. Međutim, mnogi matematičari nisu bili spremni da preduzmu potpunu rekonstrukciju logike i pre su bili skloni tome da sa paradoksima izlaze nakraj pružanjem preciznih ograničenja koja treba da važe za pojam skupa. Paradoksi Cantora, Burali-Fortija, Russella i Zermelo-Königa pokazuju da se intuitivno stanovište koje se tiče postojanja skupova ne može održati. Svi ovi paradoksi navode na postojanje nekog problematičnog skupa. Cantor je definisao skup kao 'zbirku (collection), odnosno totalitet, izvesnih dobro razabranih objekata našeg opažanja ili mišljenja' (*Gesammelte Abhandlungen*, p.282). Ovo nije matematička definicija; ona se ne može upotrebiti u logičkim derivacijama. Rečima koje su u njoj upotrebljene u istoj meri je neophodno pojašnjenje kao što je to neophodno i reči 'skup'. Poput Euklidove definicije tačke, kao 'onoga što nema delova', Cantorova definicija skupa predstavlja tek sugestiju i ne može sprečiti obrazovanje skupa svih skupova, ili skupa svih ordinala, ili skupa svih skupova koji ne sadrže sebe kao elemente. Pojavljujući se gotovo u isto vreme kao i Russellova teorija tipova, Zermelova aksiomatizacija teorije skupova (*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*) pred-

stavljala je pokušaj da se utvrdi i ograniči pojam skupa. Russellovi i Zermelovi pristupi rešenju teškoća koje su nastale kao posledica paradoksa bili su sasvim različiti. Prvi je bio dalekosežna teorija od velikog značaja za logiku i čak ontologiju, dok je drugi bio neposredni odgovor pritiscima koji su proizišli iz potreba praktičnih matematičara.

Zermelova temeljna ideja nalik je, ako se to uopšte može reci, Russellovoj teoriji ograničenja veličine, iznetoj 1905; obojica su odbila da kao skupove usvoje one zbirke (collections) koje su isuviše 'velike'. Svoj cilj Zermelo je ispunio time što je skupovima nametnuo aksiome. Skupovi nisu više 'zbirke' prihvatljive za naše intuicije; oni su objekti koji zadovoljavaju određene aksiome. Zermelo je upotrebio iznenađujuće mali broj aksioma. Na početku je uveden nula skup, ∅; kada imamo određene skupove, tada je za ove skupove postojanje unije, preseka, moć skupova obezbeđena odgovarajućim aksiomama; 'određena svojstva' razdeljuju podskupove od datih skupova; skup (∅,(∅),((∅)),...) uveden je pomoću aksioma beskonačnosti; i tako dalje. Nijedan aksiom ne dozvoljava uvođenje skupa svih skupova; baš kao što ovaj skup ne postoji u teoriji, tako ne postoji ni skup svih ordinala, niti Russellov skup. S druge strane, aksiomi omogućuju derivaciju teorema koje su matematičari priželjkivali u praktičnoj teoriji skupova. Pošto je konzistencija sistema ostala nedokazana sasvim je prihvatljivo da se u teoriji mogu pojaviti novi paradoksi. Jedino što možemo proveriti jeste to da se ne mogu ponovo pojaviti argumenti koji su vodili ka do sada poznatim paradoksima. S obzirom na Godelovu teoremu (1931), sam pojam dokaza konzistencije za teoriju skupova povezan je sa temeljnim teškoćama. Nakon Zermela, aksiomatsku teoriju skupova su tokom 1920-tih razvili A.A. Fraenkel, Thoralf Skolem i John von Neumann, a poznih 1930-tih Paul Bernays i Kurt Gödel, kao i mnogi drugi nakon njih. Ona je prerasla u živ i prostran domen istraživanja, a povratak na naivno, intuitivno stanovište o skupovima čini se da više nije moguć.

Sintaksički i semantički paradoksi

Izvesno svetlo na prirodu paradoksa bacila je ocena Giuseppe Peana. Komentarišući Richardov paradoks, Peano je 1906. pisao (*Aditione*, p.157): "Richardov primer ne pripada matema-

tici, već lingvistici; izvestan element, koji je temeljan za definiciju *N*, ne može biti određen na egzaktan način (prema pravilima matematike). Iz elementa koji nije dobro odredcn možemo izvesti nekoliko zaključaka koji su u medusobnoj kontradikciji". Taj element koji ne može biti precizno odreden jeste običan jezik i on se uvlači u definiciju *N*, u skup brojeva koji je konačno odrediv u običnom jeziku. Peanovu ideju je 1925. razvio Ramsey (*The Foundation of Mathematics*). U razmatranju teorije tipova, kako je bila predstavljena u *Principia Mathematica*, Remsey je paradokse podelio u dve grupe. Prva grupa uključuje paradokse Russella i Burali-Fortija; druga uključuje paradoks Lažac, kao uostalom i Berryjev i Richardov. Načelo kojim je rukovođena Remseyeva podela sastojalo se u tome što paradoksi prve grupe iziskuju jedino sintaksičke i matematičke pojmove; dok formulacija ovih iz druge grupe zahteva takve pojmove kao što su 'istina', 'definljivost' i 'jezik'. Paradoksi prve grupe nazvani su *sintaksičkim* paradoksima, a oni koji pripadaju drugoj grupi *semantičkim* paradoksima. Semantički paradoksi nisu, kako se čini, posledica tek nekog logičkog nedostatka, već neodređenosti ili dvosmislenosti nekog ne-logičkog pojma; oni pobuđuju probleme koji se tiču jezika i pripadaju, kako Peano kaže, lingvistici.

Prema Remseyu, jedna od posledica razlikovanja između sintaksičkih i semantičkih paradoksa sastoji se u velikom pojednostavljivanju u teoriji tipova; razgranavanje na poretke, koje je Russell naknadno uveo na hijerarhiju tipova, neophodno je samo kada je reč o isključivanju semantičkih paradoksa, a pošto se neodredenošću i dvosmislenošću može rukovati jednostavnijim sredstvima ono se u tim slučajevima može izbeći.

Remseyeva gledišta bila su u celini prihvaćena, a teorija tipova bez razgranavanja na poretke, koja je postala poznata kao prosta teorija tipova (the simple theory of types), bila je u širokoj upotrebi u logičkim istraživanjima. Danas se može postaviti pitanje razlikovanja dve vrste paradoksa. Semantički pojmovi dobili su precizne definicije, obično su dati u terminima pojmova teorije skupova, i čini se da je, ukoliko nasilno ne izvlačimo iz konteksta određene stavove, teško pobiti to da su ovi pojmovi 'logički'. Paradoks Lažac, paradoksi Grellinga i Berryja, kao i neki drugi, sada su u osnovi rešeni ne putem teorije tipova već na osnovu razlikovanja između jezika i meta-jezika, razlike

koju je naglasio i sistematizovao Alfred Tarski (*Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*). Kada se poredi rešenje paradoksa Lažac koje je pružio Tarski sa Russellovim rešenjem Russellovog paradoksa, čini se da je među njima teško načiniti temeljnu razliku. Oba iziskuju pročišćavanje naših intuicija, kako onih koje se tiču logike tako i onih vezanih za teoriju skupova. Remseyevo razlikovanje imalo je određenu težinu sve dotle dok su paradoksi bili neposredno povezani sa običnim jezikom, ali sa razvojem semantike u kojoj su temeljni pojmovi definisani terminima skupova ovo razlikovanje je počelo da gubi snagu.

Rešenje paradoksa

Tokom poslednjih godina devetnaestog veka paradoksi su izvršili odlučni uticaj na razvoj logike. Za veoma kratko vreme njihov uticaj na logiku i osnove matematike je za sobom ostavio pustoš. Nakon pojave teorije tipova i aksimatske teorije skupova oni su već bili, da tako kažemo, odomaćeni, mada su i dalje ostali trajan predmet zanimanja logičara. Isprva su obično bili shvaćeni kao posledica nepouzdanosti nekih specifičnih pravila logike, što objašnjava Russellovo prizivanje načela circulus viciosus. Ovakva rešenja za izbegavanje nepouzdanosti logičkih pravila nesumnjivo su rukovodila Russella, Zermela i ostale u njihovoj konstrukciji sistema u kojima se ne bi mogli iznova pojavljivati već poznati paradoksi. Medutim, nije se moglo formulisati nijedno pravilo koje bi samo po sebi eliminisalo paradokse, ili koje bi važilo samo za paradokse. Čak se ni za pojam cirkularnosti ne bi mogao pružiti precizan oblik koji bi bio nužan i dovoljan za postojanje paradoksa. Nije moguće dati takvo odredenje cirkularnog argumenta po kojem bi svaki cirkularan argument navodio na paradoks a svaki paradoks imao svoje ishodište u cirkularnom argumentu. Poznati paradoksi morali su biti eliminisani radikalnom i potpunom rekonstrukcijom logike i teorije skupova koja iziskuje daleko više od samog iskorenjivanja paradoksa.

Ponavljali su se pokušaji da se ovakva drastična rešenja izbegnu na taj način što se izvor problema u svakom od specifičnih slučajeva tražio u nekoj određenoj grešci, nekom kršenju uvreženih zakona logike. Na primer, takav jedan pokušaj učinio je Paul Finsler. Njegova analiza paradoksa Lažac (*Gibt es*

unentscheidbare Sätze?) je sledeća: Kada tvrdim iskaz *A*, ja time tvrdim samu činjenicu da je *A* istinito. Prema tome, ako na neki način iskaz *A* potvrđuje da je sam lažan, tvrdenje *A* je zapravo tvrdenje konjunkcije dva iskaza, *A* je istinito i *A* je lažno. Konjunkcija je kontradiktorna, pa stoga lažna; Lažac naprosto predstavlja obrazovanje lažnog stava i, sve u svemu, nije reč ni o kakvom paradoksu. Heinrich Behmann (*Zu den Widerspruchen der Logik und der Mengenlehre*) preduzeo je pokušaj da reši Russellov paradoks pokazujući da je definicija Russellovog skupa ne-paskalovska. To jest da ona ne zadovoljava uslov koji je naveo Pascal u *De l'Espirit géometrique* (1655) da definicija treba da nam omogući da definiendum zamenimo definiensom: reći da je *r* u *r* jeste, prema definiciji *r*, isto što i reći da *r* nije u *r*, definicija *r* nam ne omogućuje da eliminišemo *r* i stoga nije paskalovska.

Kako god da su ova razmatranja zanimljiva i promišljena ona navode na nekoliko dodatnih ocena. Prvo, šta su uvreženi logički zakoni ostaje nedovoljno jasno onda kada ovi zakoni nisu utelovljeni u formalni sistem. Na primer, nekome se distinkcija medu tipovima može činiti 'uvreženim' zakonom logike. U tom bi slučaju Finslerov pristup, ukoliko bismo želeli da ga u potpunosti opravdamo, naglasak stavljao pre na analizu pojmova iskaz i tvrdenje. Behmanova ocena neposredno postavlja pitanje da li svaka ne-paskalovska definicija vodi paradoksima s obzirom na to da je svaka paskalovska definicija savršeno pouzdana. Stoga je pod sumnjom to da će puko pozivanje na 'uvreženu' logiku omogućiti da paradoksi iščeznu. Štaviše, pošto je logika bila formalizovana iz razloga koji nisu bili vezani za postojanje paradoksa, ukoliko želimo da držimo na oku paradokse koji mogu iskrsnuti u formalnom sistemu, ove pozive na logičku intuiciju trebalo je prevesti u formalne termine.

Paradoks, ili pseudo-paradoks, Berberin, koji je objavio Russell, možda će baciti izvesno svetlo na ono što bi trebalo da obrazuje rešenje paradoksa. Seviljac se brije kod Seviljskog Berberina ako i samo ako se taj čovek ne brije sam. Da li se Seviljski Berberin brije sam? Ako pretpostavimo da je Seviljski Berberin takođe Seviljac, zaključak je da ako se sam brije onda on to nije, a ako ne, onda jeste. Neka $S(x)$ stoji za "x je Seviljac", $s(x,y)$ za "x brije y" a b za "Seviljski Berberin". Stav paradoksa tada postaje

(3) $(x)(S(x) \supset (s(b,x) \equiv \neg s(x,x)))$.

Na osnovu pravila substitucije (zamene), zamenjujući x sa b, dobijamo

(4) $S(b) \supset (s(b,b) \equiv \neg s(b,b))$,

što, na osnovu iskaznog računa, daje

(5) $\neg S(b)$.

Sa dodatnom asumpcijom

(6) $S(b)$

imamo kontradikciju. Ali bez ove dodatne asumpcije, mi naprosto imamo to da Seviljski Berberin nije Seviljac; on može biti žena, ili dečak, ili čovek iz nekog drugog grada. Na taj način teškoća je sasvim pregledna i lako otklonjena. Definicija Seviljskog Berberina kao Seviljca koji brije sve one i samo one Seviljce koji se ne briju sami je inkonzistentna i takav berberin ne postoji. Po svoj prilici postoje mnoga inkonzistentna rešenja, zakoni i poreci u svetu. Ovde nema paradoksa i to je razlog zbog koga se ova zagonetka ponekad naziva pseudo-paradoksom.

Međutim, ovaj argument zaslužuje da bude razmotren. Ako ostavimo da varijabla x ima u svom dosegu Seviljce, (3) postaje

(7) $(x)(s(b,x) \equiv \neg s(x,x))$,

što je sasvim nalik Russellovoj definiciji skupa:

(8) $(x)(x \in r) = \neg(x \in x))$.

Imajući ovo na umu možemo pokušati da Russellov paradoks zaodenemo tako što ćemo načiniti korak sličan onome koji nas vodi od (7) ka (3) - to jest, pišući, namesto (8),

(9) $(x)(\Sigma(x) \supset ((x \in r) = \neg(x \in x)))$,

pri čemu $\Sigma(x)$ stoji za "x je skup". Na osnovu instancijacije dobijamo

(10) $\Sigma(r) \supset ((r \in r) \equiv \neg(r \in x))$,

a na osnovu iskaznog računa,

(11) $\neg\Sigma(r)$.

Zaključak je da zbirka (collection) skupova koji sami nisu svoji elementi nije skup, baš kao što Seviljski Berberin nije Seviljac.

Međutim, mada se ova poslednja činjenica može spremno prihvatiti, nije sasvim jasno zašto zbirka *r* nije skup. Suočeni sa paradoksom teorije skupova mi bismo uvek mogli da, pobijanjem postojanja nekog skupa, uklonimo paradoks. Ali ovo bi nas ostavilo prepuštene haotičnom pojmu skupa, koji bi uvek zavisio od milosti nekog novog paradoksa a za koji ne bismo imali nikakvo opšte načelo razumevanja.

Kada je reč o paradoksima ne postoji samo jedan problem koji se na njih odnosi. Tipovi problema su različiti. Oni ne zavise samo od nekih kršenja jednog specifičnog zakona logike ('circulus viciosus'), niti su oni naprosto greške koje treba ukloniti nekom *ad hoc* ispravkom. Paradoksi zapravo otkrivaju konflikte koji postoje u našim logičkim intuicijama. Sledeći stazu logike stižemo do zaključka; idući drugom stazom koja je po našim utiscima sasvim prirodna postižemo suprotan zaključak. U tom slučaju treba da ove intuicije istražimo i da preduzmemo sistematsku rekonstrukciju logike. Ali za taj pokušaj izbegavanje paradoksa nije jedini, možda čak ni glavni, vodič. Logika je stavljena pred proces sistematizacije i formalizacije još pre vanrednog stanja koje su doneli savremeni paradoksi. Frege je nezavisno od problema paradoksa predstavio pojam formalnog sistema. Tokom ovog postupka sistematizacije paradoksi su delovali nalik obadima. Oni nam pružaju prilike da izoštrimo naše logičke intuicije, ali ne utvrđuju problem sam po sebi.

Svaki dati paradoks počiva na brojnim definicijama, asumpcijama i argumentima i mi ga možemo rešiti dovođenjem u pitanje bilo čega od navedenog. To je razlog zašto je literatura o paradoksima toliko bogata i zbog čega obiluje toliko brojnim rešenjima. Ovo je takođe razlog zašto ne postoji jedinstven problem paradoksa. Zbog toga što, kada se radi o značajnim paradoksima, nije reč o tome da oni na neki način budu rešeni, već se radi o tome da se oni reše na način koji proširuje i pojačava naše logičke intuicije. Da se pronađe među ponekad isuviše brojnim rešenjima takvo koje će na najmanje bolan način obuhvatiti našu logiku i možda, u izvesnoj meri, prilagoditi našu logiku ovim rešenjima.

Još neki paradoksi

Gore predstavljeni paradoksi jesu oni koji su istorijski imali najveći uticaj na razvoj logike. Ali poznati su i drugi paradoksi.

Štaviše, zagonetka ili zbunjujući argument može ali ne mora voditi u paradoks, u zavisnosti od njegove dosledne formulacije.

Paradoks denotacije iznosi na videlo razliku između upotrebe i navođenja izraza. Ovde je predstavljen onako kako ga navodi Evert W. Beth (*The Foundation of Mathematics*, p.490). Sledeće izvođenje

$$\frac{\begin{array}{c}\log 343 > 2 \\ 343 = 7^3\end{array}}{\log 7^3 > 2}$$

izvesno da ne bi izazvalo bilo kakvu sumnju. Ali slično izvođenje

$$\frac{\begin{array}{c}\text{"343" sadrži tri figure} \\ 343 = 7^3\end{array}}{\text{"}7^3\text{" sadrži tri figure}}$$

je neispravno. Teškoća je rešena uvođenjem posebnog pravila za upotrebu znakova za navođenje.

Paradoks predikcije (predviđanja) ima mnoge oblike - to su Dželat, Kviz iznenađenja i tako dalje. U verziji zvanoj Dželat sudija u nedelju donosi presudu da će izvesni zatvorenik biti obešen u ponoć jednog od sledećih šest dana, kao i da on sam ne zna kojeg će od tih dana biti obešen sve do jutra pred samo vešanje. Čini se da se presuda može izvršiti kao i da ne može. Prema doslednoj formulaciji koja je usvojena, paradoks se može rasvetliti (kao što je to kod W.V. Quinea, *On a So-called Paradox*) ili kao takav održati (kao kod Davida Kaplana i Richarda Montaguea, *A Paradoks Regained*).

Ono što se ponekada naziva Lowenheim-Skolemov paradoks posledica je toga što, mada na osnovu Cantorovog poznatog dijagonalnog argumenta postoje neprebrojivi skupovi, bilo koja formalizovana teorija skupova ima prebrojiv model. Lowenheim-Skolemova teorema postavlja dublja pitanja o samoj prirodi i ograničenjima formalizacije, ali u ovom kontekstu bilo bi zavodljivo govoriti o paradoksu; Lowenheim-Skolemova teorema ne može se dovesti u pitanje.

Paradoksi implikacije' isto tako nisu paradoksi. Definicija kondicionala je takva da lažan iskaz povlači bilo koji iskaz, istinit ili lažan, a da je istinit iskaz posledica bilo kojeg iskaza, istinitog ili lažnog. Ovaj rezultat može odstupati od intuicije, ali on sam ne obrazuje logički paradoks.

Bibliografija

Behmann, Heinrich, "Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. 40 (1931), 37-48.

Beth, Evert W., *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam, 1959.

Burali-Forti, Cesare, "Una questione sui numeri transfiniti". *Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo*, Vol. 11 (1897), 154-164.

Cantor, Georg, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin, 1932; Hildesheim, 1962.

Church, Alonzo, "Schroder's Anticipation of the Simple Theory of Types", Cambridge, Mass., 1939. Preštampano za Peti međunarodni Kongres za jedinstvenost nauke, kao da se pojavio u *Journal of Unified Science*, Vol. 9, koji nikada nije izašao.

Finsler, Paul, "Gibt es unentscheidbare Satze?" *Comentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 16 (1944), 310-320.

Grelling, Kurt, i Nelson, Leonard, "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti". *Abhandlungen der Fries schen Schule*, N.S. Vol. 2 (1908), 301-334.

Jourdain, P.E.B., "On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates". *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 7, 61-75.

Kaplan, David, i Montague, Richard, "A Paradox Regained". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 1 (1960), 79-90.

Peano, Giuseppe, "Additione". *Revista de matematica*, Vol. 8 (1902-1906), 143-157.

Quine, W.V., "On the Axiom of Reducibility". *Mind*, Vol. 45 (1936), 498-500.

Quine, W.V., "On a So-called Paradox". *Mind*, Vol. 62 (1955), 65-57.

Ramsey, F.P., "The Foundations of Mathematics". *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2nd series, Vol. 25 (1926), 338-384. Preštampano u *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. New York and London, 1931.

GLOSAR LOGIČKIH TERMINA

Ovaj glosar se ograničava, uz izvesna odstupanja, na termine koji su upotrebljeni u formalnoj logici, teoriji skupova, kao i u srodnim oblastima. Nije načinjen nijedan pokušaj da se obuhvati i ono što se obično zove 'induktivna logika', mada je nekoliko termina iz ove oblasti ovde uključeno kako bi čitaocu mogli biti od pomoći.

a fortiori. Nesilogističko posredno zaključivanje čiji je oblik '*B* je veće od *C*; *A* je veće od *B*; prema tome, *A* je veće od *C*'. Očigledno je da validnost ovoga argumenta sledi iz tranzitivnosti relacije 'veće od', zbog čega neki autori ovaj termin proširuju tako da on obuhvata sve relacione silogizme čija se validnost zasniva na tranzitivnosti relacije koja je u njima sadržana. Vidi **relacija**.

A-iskaz. U tradicionalnoj logici, univerzalno afirmativni kategorički iskaz. Primer je 'Svi ljudi su smrtni'.

abdukcija. (1) Silogizam za čiju major premisu se zna da je istinita, ali čija je minor premisa tek verovatna. (2) C.S. Peirceovo ime za tip rasudivanja koji na osnovu datog skupa činjenica pruža njihovu eksplanatornu hipotezu.

agregat. Zbirka (kolekcija) objekata koja zadovoljava dati uslov.

akcident. Vidi **predikabilije**.

akko (iff). Opšta skraćenica za 'ako i samo ako' (if and only if). Vidi **bikondicional**.

aksioma izbora (multiplikativna aksioma). Aksioma u teoriji skupova koja tvrdi da ako je *a* odvojeni skup koji nema nula

skup kao jedan od svojih članova, tada je Dekartov proizvod za *a* različit od nula skupa. Može se dokazati da je ova aksioma ekvivalentna sa teoremom dobrog uređenja.

aksioma. Osnovni iskaz u formalnom sistemu koji se tvrdi bez dokaza a iz kojeg su, zajedno sa drugim iskazima takve vrste, shodno pravilima derivacije tog sistema, derivirane sve ostale teoreme. Vidi **postulat**.

aksiomatski metod. Metod ispitivanja nekog predmeta koji otpočinje nekim nizom nedefinisanih termina i nekim nizom aksioma, a nakon toga nastavlja deriviranjem istina o tom predmetu iz ovih postulata metodima formalne logike.

aksiomska shema. Predstavljanje neograničenog broja aksioma putem izraza koji sadrži sintaksičke varijable, a kao vrednosti poseduje dobro obrazovane formule. Svaka vrednost tog izraza uzima se kao aksioma.

aksiomska shema separacije. Vidi **Aussonderungsaxiom**. Aksiom iz teorije skupova, koji je isprva uveo Ernst Zermelo, a koji tvrdi da za bilo koji predikat *P* postoji skup koji sadrži sve i samo one članove iz *a* koji zadovoljavaju predikat *P*.

aktualna beskonačnost. Beskonačnost shvaćena kao obuhvaćena celina.

alephi. Simboli koje je uveo Georg Cantor, a koji označavaju kardinalnost beskonačnih skupova. *Aleph-nula* ($\aleph_0$) označava kardinalnost najmanjeg beskonačnog skupa, aleph-jedan ($\aleph_1$) kardinalnost sledećeg najvećeg beskonačnog skupa, itd. Vidi **hipoteza kontinuuma**.

algebra logike. Sistem u kojem su algebarske formule upotrebljene tako da izražavaju logičke relacije. U takvom sistemu mnogi svojstveni algebarski zakoni, a koji važe za brojeve, nisu zadržani. Delo Georgea Boolea sadrži prvi značajan primer algebre logike.

algoritam. Mehanička procedura koja omogućava, kroz konačan broj koraka, izračunavanje izvesnih tipova rezultata na osnovu izvesnih tipova podataka. Vidi **problem odlučivosti**; **efektivnost**.

alternacija. Vidi **disjunkcija, ekskluzivna**.

alternativno pobijanje. Vidi **Shefferova crta-funkcija**.

ambigvitet. Mogućnost da nešto bude shvaćeno na dva ili više načina. Ovaj termin je dosledno primenljiv jedino u slučajevima gde mogućnost različite interpretacije ne zavisi od samog izraza, već od nekog svojstva prisutnog kod pojedinačne upotrebe tog izraza; kada ova mogućnost zavisi od samog izraza tada se izraz naziva *ekvivokalnim* (dvosmislenim). Međutim, mnogi autori ne prave ovu razliku.

amfibolija. Ekvivokacija koja se ne pojavljuje u slučaju ekvivokalne reči ili fraze već usled gramatičke strukture rečenice ili njene konstrukcije koja ostavlja prostora da fraza u celini ne bude sasvim određena. Primer je '...Petar predstavlja subjekat u rečenici'.

ampilacija. U srednjovekovnoj logici, ekstenzija zajedničkog termina od uže supozicije na širu.

analitički. Upotrebljava se u slučaju iskaza čije je pobijanje samokontradiktorno. Takav je iskaz istinit ili s obzirom na samu njegovu formu (u kom slučaju se zove *logička istina*, ili *logička nužnost*) ili s obzirom i na njegovu logičku formu i na značenje njegovih gradivnih termina. Primer logičke istine jeste 'Pada kiša ili ne pada kiša'; jedan primer analitičke istine koji nije logička istina jeste 'Sve neženje su neoženjene'. Analitički iskazi ne mogu biti lažni i zbog toga se kaže da su oni *nužne istine*. Da li postoje nužne istine a koje nisu i analitičke istine - predstavlja predmet šire rasprave.

analiza, matematička a. Teorija o realnim i kompleksnim brojevima i njihovim funkcijama.

analogija. Poređenje dva ili više objekata koje ukazuje na jedno ili više obeležja po kojima su oni slični. *Argument po analogiji* jeste zaključivanje na osnovu nekoliko sličnih odlika između dva ili više objekata o drugim takvim odlikama. Metod *pobijanja putem logičke analogije* jeste metod pokazivanja da je argument pogrešan na osnovu iznošenja primera drugog argumenta koji ima isti oblik, a čija invalidnost je neposredno očigledna.

antecedent. Deo hipotetičkog iskaza koji prethodi znaku implikacije.

antilogizam. Trijada takvih iskaza da pridruživanje istinitosti bilo koja dva od tih iskaza povlači lažnost trećeg. Načelo

silogizma Christine Ladd-Franklinove kao validan silogizam utvrduje onaj čije premise uzete sa kontradikcijom zaključka obrazuju antilogizam. Tako, silogizam čije su premise 'Svi ljudi su smrtni' i 'Sokrat je čovek', a čiji zaključak je 'Sokrat je smrtan' jeste validan silogizam, zato što zajedničko tvrđenje bilo koja dva od tri iskaza koji obrazuju premise sa kontradikcijom zaključka povlači lažnost trećeg iskaza.

antinomija. Vidi Poglavlje ***PARADOKSI***.

apelacija. U srednjovekovnoj logici se smatralo da termin ima apelaciju onda kada je primenljiv na neke postojeće stvari. Tako, 'sadašnja kraljica Engleske' ima apelaciju, ali 'sadašnja kraljica Sjedinjenih država' nema.

apodiktički (apodeiktički) iskaz. Vidi **modalnost**.

apstrakcija, aksioma a. (aksioma komprehenzije). Aksioma teorije skupova koja tvrdi da za bilo koji predikat *P* postoji skup svih i jedino onih objekata koji zadovoljavaju *P*. Upotreba ove aksiome bez dodatnih ograničenja vodi paradoksima teorije skupova.

apstrakcija. *(1)* U tradicionalnoj logici, izvođenje univerzalnog na osnovu pojedinačnosti. *(2)* U teoriji skupova, proces određivanja skupa kao skupa svih objekata koji imaju posebna svojstva.

apstraktni termin. U tradicionalnoj logici, termin koji predstavlja ime za zajedničku prirodu mnogih individua, a koje je utvrđeno nezavisno od njih, ili od onoga po čemu se jedna od druge međusobno razlikuju. Opšti primer apstraktnog termina je 'ljudskost'.

argument funkcije. Član domena date funkcije.

Arhimedovsko svojstvo. Svojstvo sistema brojeva pri kojem za bilo koji broj *a* i *b*, ako je *a* manje od *b*, tada postoji broj *c* takav da je *a* pomnoženo sa *c* veće od *b*.

aritmetizacija matematike (aritmetizacija analize). Definicija neprirodnih brojeva, koju su razvili Karl Weierstrass, Richard Dedekind i Georg Cantor, kao izvesnih objekata obrazovanih iz prirodnih brojeva i objekata teorije skupova, kao i odgovarajuće redukcije svojstava predašnjih na ova potonja svojstva.

aritmetički predikat. Predikat koji može biti eksplicitno izražen pomoću termina istinosno-funkcionalnih veznika iskaznog računa, univerzalnog i egzistencijalnog kvantifikatora, konstantama i varijablama prirodnih brojeva, kao i funkcijama sabiranja i množenja.

aritmetizacija sintakse. Postupak koreliranja objekata formalnog sistema sa nekim ili svim prirodnim brojevima, a potom ispitivanja relacija i svojstava (na taj način) koreliranih brojeva kako bi se postiglo obaveštenje o sintaksi tog formalnog sistema. Ovo je sistematski učinio Kurt Godel u istraživanjima koja su dovela do njegovih teorema nepotpunosti.

ars combinatoria. Tehnika derivacije složenih pojmova putem kombinacije nekoliko relativno prostih pojmova koji su uzeti kao primitivni. Ovu je tehniku predložio Leibniz kao validno sredstvo za ispitivanje bilo kojih predmeta. On je predložio izgrađivanje univerzalnog jezika (***characteristica universalis***) koji sadrži nekoliko primitivnih simbola, na osnovu čijih termina bi bili određeni svi ostali simboli. Njemu bi se dodala univerzalna matematika (***mathesis universalis***) - to jest, univerzalan sistem rasuđivanja -te bi u tom jeziku mogli biti ispitivani svi predmeti. Leibnizov program se obično shvata kao rana preteča formalizacije različitih disciplina.

asertorički izraz. Vidi **modalnost**.

asocijativnost. Svojstvo relacije *R* koje se sastoji od identiteta '*a R (b R c)*' sa '*(a R b) R c*', pri čemu su *a*, *b* i *c* bilo koji od elemenata iz polja *R*. Ovo svojstvo poseduje operacija sabiranja, pošto je '*a + (b + c)*' isto što i '*(a + b) + c*'.

atribut. Mada se sada često koristi sinonimno sa 'svojstvo', ovaj se termin tradicionalno odnosi na suštinska svojstva bića.

Aussonderungsaxiom. Aksiom teorije skupova, koji je prvi uveo Ernst Zermelo, a koji tvrdi da za bilo koji predikat *P* postoji skup koji sadrži sve i samo one članove iz *a* koji zadovoljavaju predikat *P*.

Barbara. Vidi **mnemonički termini**.

Baroco. Vidi **mnemonički termini**.

beskonačan skup. Vidi **konačan skup**.

beskonačnost, aksioma b. Aksioma teorije skupova koja obezbeđuje postojanje beskonačnog broja individua. Ova aksioma ima različite oblike, od kojih svi imaju to zajedničko svojstvo da su validni barem u jednom beskonačnom domenu individua, a da nisu validni u bilo kojem konačnom domenu individua.

bikondicional. Binarni iskazni veznik (<—>,=), koji se obično čita kao 'ako i samo ako' (što se često skraćuje sa 'akko'), čija je istinosna tablica takva da je '*A* ako i samo ako *B*' istinito onda kada su *A* i *B* ili oba istinita ili oba lažna, a koje je lažno kada je jedan istinit a drugi lažan. 'A ako i samo ako B' je ekvivalentno sa 'ako *A* onda *B* i ako *B* onda *A*'.

binarni veznik. Vidi **veznik**.

Bocardo. Vidi **mnemonički termini**.

Booleova algebra. Prva algebra logike. Nju je sačinio George Boole, a njen konačan oblik dao je Ernst Schroder.

Booleove funkcije. Funkcije koje su prisutne u Booleovoj algebri. Najznačajnije funkcija su unija klase, funkcija preseka klase i funkcija komplementa klase.

Bramantip. Vidi **mnemonički termini**.

broj. Vidi **kardinalan broj; prirodan broj; racionalan broj; realan broj**.

broj ograničenja (limit number). Ordinalni broj koji nije 0 a takav je da ako je *a* njegov član tada je sledbenik od *a* takođe njegov član.

buduce kontingencije, problem b.k. Problem, koji je prvi razmatrao Aristotel a koji se sastoji u tome da li bilo koji kontingentni stav o budućnosti ima istinosnu vrednost pre onog vremena na koje se njime ukazuje.

Burali-Fortijev paradoks. Vidi **paradoks**, kao i poglavlje ***LOGIČKI PARADOKSI***.

Camenes. Vidi **mnemonički termini**.

Camestres. Vidi **mnemonički termini**.

Cantorova teorema. Teorema koja tvrdi da za svaki dati skup *a* moć skupa *a* ima veću kardinalnost nego što je ima skup *a*.

Cantorovi paradoksi. Vidi **paradoks**, kao i poglavlje ***LOGIČKI PARADOKSI***.

Celarent. Vidi **mnemonički termini**.

Cesare. Vidi **mnemonički termini**.

Churchova teorema. Teorema koju je izneo i dokazao Alonzo Church, o tome da ne postoji nijedan odlučiv postupak za odre-

đivanje da li je neka proizvoljna dobro obrazovana formula funkcionalnog računa prvog reda teorema tog sistema, ili nije.

Churchova teza. Teza da je svaka efektivno izračunljiva funkcija (efektivno odlučivi predikat) generalno rekurzivna.

cirkularno rasuđivanje. Vidi **pogreška**.

consequentia. Ime koje su srednjovekovni logičari dali za hipotetički iskaz. *Formalne* consequentiae (one koje važe za sve supstitucije kategorematičkih termina) razlikuju se od *materijalnih* consequentiae (onih koje važe samo za partikularne kategorematičke termine).

članstvo. Relacija koja postoji između skupa i njegovih elemenata. Relaciju skup-članstvo treba razlikovati od relacije skup-inkluzija.

Darapti. Vidi **mnemonički termini**.

Darii. Vidi **mnemonički termini**.

Datisi. Vidi **mnemonički termini**.

De Morganovi zakoni. Teoreme iskaznog računa koje tvrde materijalnu ekvivalenciju ′ne (*A* ili *B*)′ sa ′ne-*A* i ne-*B*′, kao i ′ne (*A* i *B*)′ sa ′ne-*A* ili ne-*B*′. De Morgan, u svojoj knjizi *Formal Logic*, zapravo nije postavio ove zakone; namesto toga, on je dao odgovarajuće zakone za logiku klasa. Treba napomenuti da su neki od srednjovekovnih logičara ustanovili ove teoreme za logiku iskaza.

Dedekind beskonačan. Vidi **konačan skup**.

Dedekind konačan. Vidi **konačan skup**.

dedukcija. Takav oblik zaključivanja u kojem, u validnom deduktivnom argumentu, istovremeno tvrđenje premisa i pobijanje zaključka predstavlja kontradikciju.

definicija, Aristotelova teorija d. Vidi **predikabilije**.

definicija. Opis ili objašnjenje značenja reči ili fraze. Logičari su uočili različite tipove definicija. Na samom početku, postoji razlika između *leksičke* definicije (izveštaja o značenju koje reč već ima) i *stipulativne* definicije (predloga za pripisivanje značenja nekoj reči). Takođe treba razlikovati, zajedno sa tradicionalnim logičarima, sledeće tehnike definisanja: (1) *rečničku* (dictionary) definiciju, koja daje reč ili frazu koja je

sinonimna sa definiendumom; (2) *ostenzivnu* definiciju, koja daje primere odgovarajucih objekata na koje je reč ili fraza primenjena; i (3) definiciju *per genus et differentiam*, koja daje rod odgovarajućih objekata na koje je reč ili fraza primenjena, kao i razliku koja izdvaja ove objekte od drugih članova tog roda. Vidi **predikabilije**.

Neki novi tipovi definicija koje su razmatrali savremeni logičari uključuju (4) definiciju *putem apstrakcije*, koja definiše klasni termin odredujući svojstva koja neki objekat mora imati da bi bio član te klase, i (5) *rekurzivnu (induktivnu)* definiciju, koja definiše numeričke teorijske funkcije ili predikatske termine tako što daje vrednost ili vrednosti te funkcije ili predikata kada je argument 0, a zatim u terminima bilo kojeg broja *a* daje vrednost ili vrednosti za slučaj kada je argument sledbenik *a*, i konačno vrednost kada je argument samo *a* (cf **rekurzivna definicija**). Konačno, mora se razlikovati (6) *kontekstualna* definicija, koja daje značenje definiendumu ne izolovanom već jedino u pojedinačnom kontekstu.

definiendum. Ono što se definiše definicijom.

definiens. Ono koje, u definiciji, definiše definiendum.

Dekartov proizvod. Za dati skup *a*, skup čiji su članovi svi i samo oni skupovi koji sadrže jedan član svakog člana iz *a*.

demonstracija (**derivacija ili izvodenje**). Deduktivan dokaz pružen za neki dati skup iskaza.

denotacija. Vidi **značenje, Fregeova teorija z.**

derivabilan. Kaže se da je skup iskaza derivabilan iz drugog skupa iskaza ako i samo ako postoji validno deduktivno zaključivanje koje ima ovaj potonji skup kao svoje premise, a ovaj predašnji skup kao svoj zaključak.

derivacija. Vidi **demonstracija**.

derivirana pravila zaključivanja. Metalingvistička teorema tvrdi da za izvestan tip dobro obrazovane formule pod izvesnim uslovima postoji dokaz u objekt jeziku. Smisao takvih teorema jeste taj da nam one omogućuju da utvrdimo da su izvesne dobro obrazovane formule teoreme tog objekt jezika, a da pri tome ne moramo da u objekt jeziku pronađemo dokaz za te formule.

diadička relacija. Dvomesna relacija.

dictum de omni et nullo. Načelo silogističkog rasudivanja koje tvrdi da svemu onome čemu je pridodat razdeljen predikat (bilo afirmativan bilo negativan) bilo koje klase, mora mu biti pridodat predikat nečega što pripada toj klasi.

diferencija. Vidi **predikabilije**.

dihotimija. Vidi **klasifikacija**.

dijagonalni dokaz. Dokaz, koji je pružio Georg Cantor, o tome da postoje beskonačni skupovi koji ne mogu biti prebrojani (enumerated).

dilema. Argument čija je major premisa konjunktivna tvrdnja koja se sastoji od dva hipotetička iskaza, a čija je minor premisa disjunktivni iskaz. Ako minor premisa alternativno tvrdi antecedent major premise, kaže se da je dilema *konstruktivna*; ako minor premisa alternativno pobija konsekvent major premise, kaže se da je dilema *destruktivna*. Kostruktivne dileme se dele na *proste konstruktivne* dileme (antecedenti major premise su različiti a konsekventi su isti) i *složene konstruktivne* dileme (i antecedenti i konsekventi major premise su različiti). Destruktivne dileme se dele na *proste destruktivne* dileme (konsekventi major premise su različiti a antecedenti su isti) i *složene destruktivne* dileme (i konsekventi i antecedenti major premise su različiti).

Dimaris. Vidi **mnemonički termini**.

Disamis. Vidi **mnemonički termini**.

disjunkcija, inkluzivna. Binarni iskazni veznik (V), jedna od mogućih interpretacija za 'ili', čija istinosna tablica je takva da je '*A* ili *B*' istinito u svim slučajevima izuzev onda kada su i *A* i *B* lažni.

disjunkcija, ekskluzivna (alternacija). Binarni iskazni veznik, jedna od mogucih interpretacija za 'ili', čija je istinosna tablica takva da je '*A* ili *B*' istinito ako i samo ako je jedan od dva iskaza istinit a drugi lažan.

diskretnost. Svojstvo koje poseduju svi uređeni skupovi koji nemaju svojstvo kontinuiteta.

distributivnost. Relacija koja postoji između dve relacije **R** i $\mathbf{R}^*$ kada je '$a\,\mathbf{R}\,(b\,\mathbf{R}^*\,c)$' istovetno sa '$(a\,\mathbf{R}\,b)\,\mathbf{R}^*\,(a\,\mathbf{R}\,c)$'.

divizija (deoba). Vidi **klasifikacija**.

division non faciat saltum. Vidi **klasifikacija**.

dobro obrazovane formule (wffs). One formule datog logističkog sistema za koje se smisleno može pitati da li su teoreme tog sistema ili nisu. U bilo kojem pojedinačnom sistemu data su pravila koja definišu klasu dobro obrazovanih formula i koja omogucuju da se mehanički odredi da li je dati niz simbola dobro obrazovana formula tog sistema ili nije.

dobro uredenje, teorema d.u. Teorema koja tvrdi da za bilo koji skup postoji relacija koja ga dobro uređuje. Vidi **izbor, aksioma i.**

dokaz. Za datu dobro obrazovanu formulu A u datom logističkom sistemu dokaz A je konačan niz dobro obrazovanih formula od kojih je poslednja A i od kojih je svaka ili aksiom sistema ili se može izvesti iz prethodnih članova tog niza shodno pravilima zaključivanja tog sistema.

dokaz iz hipoteze. Dokaz iz datog skupa hipoteza A_1, A_2, ..., A_n u datom logističkom sistemu je niz dobro obrazovanih formula od kojih je poslednja zaključak dokaza i od kojih je svaka ili aksiom sistema, ili neka od A_1, A_2, ..., A_n, ili formula koja se može izvesti iz prethodnih formula u tom nizu shodno pravilima zaključivanja tog sistema.

dokaz, teorija d. Vidi **metamatematika**.

domen relacije. Za bilo koju relaciju **R** skup svih objekata a takvih da postoji objekat b takav da a**R**b.

domen individua. Za datu interpretaciju datog logističkog sistema skup onih objekata koji su obuhvaćeni dosegom individualnih varijabli.

doseg (obim) relacije. Vidi **konverzni domen relacije**.

doseg kvantifikatora. Za dato događanje kvantifikatora kao dela dobro obrazovanog dela dobro obrazovane formule, ostatak tog dobro obrazovanog dela.

doseg vrednosti. Klasa onih stvari koje su neodređeno imenovane pomoću date varijable.

dovoljan uslov. Vidi **uslov**.

dualnost. Relacija koja postoji između dve formule koje su u svemu istovetne izuzev u međusobnoj substituciji univerzalnog namesto egzistencijalnog kvantifikatora, nula klase sa univer-

zalnom klasom, sumom skupova sa proizvodom skupova i konjunkcijom sa disjunkcijom (pri čemu su konjunkcija, disjunkcija i negacija uzeti kao primitivni, dok su svi ostali veznici definisani u terminima ovih). Kaže se da dve formule predstavljaju duale jedna drugoj. Na primer, '*A* i *B*' i '*A* ili *B*' jesu duali.

dvosmislenost. Vidi **ambigvitet**.

E-iskaz. U tradicionalnoj logici, univerzalno negativni kategorički iskaz. Primer je 'Nijedan čovek nije smrtan'.

efektivnost. Kaže se da je pojam efektivan ako postoji algoritam za određivanje, u konačnom broju koraka, da li pojam pripada ili ne bilo kojem datom objektu. Na primer, u logističkom sistemu pojam dokaza je efektivan, pošto postoji mehanička procedura za određivanje, u konačnom broju koraka, da li u tom sistemu dati sekvent dobro obrazovanih formula obrazuje ili ne obrazuje dokaz druge dobro obrazovane formule.

egzistencijalna instancijacija, pravilo e.i. Pravilo zaključivanja koje dopušta da se iz stava čiji oblik je 'Postoji takav objekat da za njega važi svojstvo *P*' izvede stav čiji oblik je 'Svojstvo *P* važi za objekat *a*'. Pošto ovo zaključivanje nije u potpunosti validno neophodno je postaviti izvesna ograničenja za njegovu upotrebu.

egzistencijalni kvantifikator. Simbol (E) ili (∃), koji se čita kao 'postoji'. Koristi se u kombinaciji sa varijablom i stavlja se ispred dobro obrazovane formule, kao u slučaju '(∃*a*) ____' ('Postoji objekat *a* takav da ____').

egzistencijalni značaj (import). Obavezivanje prema postojanju izvesnih objekata a koje predstavlja posledicu neke date propozicije.

egzistencijana generalizacija, pravilo e.g. Pravilo zaključivanja koje dozvoljava da se iz stava čiji oblik je 'Svojstvo *P* važi za objekat *a*' izvede stav čiji je oblik 'Postoji objekat takav da za njega važi svojstvo *P*'.

ekstenzija. Mada se često upotrebljava sinonimno sa 'denotacija', ovaj termin se obično koristi da se ukaže na skup vrsta koji nije sadržan unutar roda označenog (denoted) datim terminom. U prvom smislu ekstenzija 'ljudi' jeste skup svih ljudi; u drugim smislu to je skup svih onih skupova na koje se može razdeliti ljudski rod.

ekstenzionalan. Upotrebljava se kod pristupa nekom problemu koji u određenom smislu više skreće pažnju na istinosnu vrednost rečenica nego na njihova značenja. Tako logika u kojoj, zbog deduktivnih relacija, istinosne vrednosti mogu biti zamenjene rečenicama jeste ekstenzionalna logika. Cf. **intenzionalan**.

ekstenzionalnost, aksioma e. Aksioma teorije skupova koja tvrdi da za bilo koja dva skupa *a* i *b*, ako za svako *c*, *c* predstavlja član iz *a* ako i samo ako je *c* član iz *b*, tada je *a* identično sa *b*.

ekvipolentan. Odnosi se na skupove između kojih postoji korespondencija jedan-jedan.

ekvivalencija, relacija e. Relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna (vidi **relacija**). Identitet je standardan primer relacije ekvivalencije.

ekvivalentan. Odnosi se na dva iskaza koji su povezani na taj način da je jedan istinit ako i samo ako je drugi istinit. Neki autori takođe koriste ovaj termin kada je primenjen na skupove sinonimno sa 'ekvipolentan'.

ekvivokacija. Vidi **pogreške**.

element. Član datog skupa.

elementarna teorija broja. Teorija brojeva, sve dotle dok ne iziskuje analizu.

entimem. Silogizam u kojem ili nije precizno izneta jedna od premisa ili nije izneta konkluzija. Primer entimema je zaključivanje 'Sokrat je smrtan' iz 'Svi ljudi su smrtni', pri čemu premisa koja nedostaje je 'Sokrat je čovek'.

enumerabilan skup. Skup koji je ili konačan, ili ima aleph-nula kardinalnost ($\aleph_0$). Cf. **prebrojiv skup**.

epagoge. U tradicionalnoj logici, proces utvrđivanja opšteg iskaza putem indukcije.

epiheirema. Silogizam u kojem je jedna ili više premisa iznesena kao konkluzija entimematskog prosilogizma. Vidi **polisilogizam**.

episilogizam. Vidi **polisiiogizam**.

epsilon. U teoriji skupova, ime simbola (ε) za skup-članstvo.

eristika. Veština pogrešnog ali ubedljivog rasuđivanja.

esencija. Vidi **predikabilije**.

Eulerovi dijagrami. Predstavljanja relacija među klasama pomoću odnosa među krugovima, koja se obično pripisuju Leonhardu Euleru.

Felapton. Vidi **mnemonički termini**.

Ferio. Vidi **mnemonički termini**.

Ferison. Vidi **mnemonički termini**.

Fesapo. Vidi **mnemonički termini**.

Festino. Vidi **mnemonički termini**.

figura. Način klasifikovanja kategoričkih iskaza. Prema većini tradicionalnih logičara, pošto figura zavisi od položaja srednjeg termina u premisama, postoji četiri moguće figure. U prvoj figuri srednji termin je subjekt major premise a predikat minor premise. U drugoj figuri srednji termin je predikat obe premise, dok je u trećoj figuri subjekt obe premise. U četvrtoj figuri srednji termin je predikat major premise a subjekt minor premise. Aristotel je dopuštao samo tri figure, a kao indirektne shvatao one silogizme koje su kasniji logičari svrstali u četvrtu.

finitarni metod. Tip metoda na koji su se David Hilbert i neki od njegovih sledbenika ograničili u svojim matematičkim istraživanjima. Najjasniji stav ovih ograničenja pružio je Jacques Herbrand, koji se zalagao za to da moraju biti ispunjeni sledeći uslovi: (1) Mora se baratati samo konačnim i odredenim brojem objekata i funkcija. (2) Oni moraju biti tako definisani da postoji nedvosmisleno izračunavanje njihovih vrednosti. (3) Nikada se ne sme tvrditi postojanje nekog objekta a da se pri tome ne ukaže na to kako on može biti konstruisan. (4) Ne sme se nikada baratati sa skupom svih objekata nekog beskonačnog totaliteta. (5) To da teorema važi za sve iz skupa objekata znači da je za svaki pojedinačni objekat moguće ponoviti opšti argument o kojem je tu reč, koji bi tada bio shvaćen samo kao prototip ishodišta pojedinačnih argumenata.

finitni (konačni) skup (induktivni skup). Skup koji je ili prazan ili takav da postoji jedan-jedan korespondencija između njegovih članova i članova skupa svih prirodnih brojeva koji su manji od tog određenog prirodnog broja. Za skup koji nije finitni kaže se da je *beskonačan* (ili da je infinitni).

Richard Dedekind je uveo drugačiju karakterizaciju konačnih i beskonačnih skupova. *Dedekind konačan* skup jeste onaj koji nema nijedan odgovarajući podskup takav da postoji

jedan-jedan korespondencija između elemenata ovog skupa i njemu odgovarajućeg podskupa. *Dedekind beskonačan* skup (ili *refleksivan* skup) jeste onaj koji nije Dedekind konačan. Može se pokazati da je Dedekindova karakterizacija ekvivalentna sa prethodno datom; međutim, dokaz iziskuje aksiomu izbora.

formalizacija. Konstrukcija logističkog sistema za koji je sačinjena neka takva željena interpretacija na osnovu koje se istine neke date saznajne celine interpretiraju kao teoreme tog sistema.

formalizam. Učenje, koje su kao program razvili David Hibert i njegovi sledbenici, po kojem osnove koje su nužne za matematiku jesu njena formalizacija i dokaz finitarnim metodama toga da je tako izveden sistem konzistentan.

formalizovani jezik. Logistički sistem sa interpretacijom.

formalni sistem. Vidi **logistički sistem**.

formalno implicira. Kaže se da iskaz *A* formalno implicira iskaz *B* u datom logističkom sistemu ako postoji, u okviru tog sistema, valjan dokaz za *B*, a na osnovu *A* uzetog kao hipoteza.

formula. Za neki dati logistički sistem bilo koji niz primitivnih simbola.

Fresison. Vidi **mnemonički termini**.

fundacija, aksioma f. (**Axiom der Fundierung, aksioma regularnosti**). Aksioma teorije skupova koja tvrdi da neprazan skup *a* sadrži član *b* koji nema nijednog zajedničkog člana sa *a*.

funkcija. Korespondencija mnogo-jedan.

funkcija izbora. Funkcija *R* čiji domen uključuje (ili, prema nekim autorima, jeste poistovećen sa skupom koji obuhvata) sve neprazne podskupove datog skupa *a*, a čija je vrednost član bilo kojeg takvog podskupa.

funkcionalni račun. Vidi **račun**.

Galenova figura. Četvrta silogistička figura, čije se uvođenje pripisuje Galenu.

generalizacija, pravilo g. Pravilo zaključivanja koje omogućuje da se iz svakog iskaza zaključi drugi iskaz koji je isti kao i onaj prvobitni, s tom razlikom što ispred njega stoji univerzalni kvantifikator koji vezuje varijablu.

Gentzenov sistem. Sistem logike karakterističan po uvođenju novih veznika u objekt jezik (simbolizovanih pomoću —>) koji imaju svojstvo analogno sa uobičajenom metalingvističkom idejom 'dokazivo u sistemu'. Pravila zaključivanja takvog sistema primenjuju se na *Sequenzen* - to jest na formule koje imaju oblik '$A_1, A_2, ..., A_n \rightarrow B_1, B_2, ..., B_m$,' pri čemu su *m* i *n* jednaki sa ili veći od 0, a $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m$ predstavljaju formule uobičajenih logičkih sistema.

Gentzenov dokaz konzistencije. Dokaz, koji je 1936. prvi izložio Gerhard Gentzen, konzistencije klasične čiste teorije brojeva sa postulatom indukcije bez ograničenja. Ovaj dokaz koristi transfinitnu indukciju sve do ordinala ε_0.

Gödel - von Neumann - Bernaysova teorija skupova. Oblik aksiomatske teorija skupova koja se ne suočava sa paradoksima teorije skupova tako što pravi razliku izmedu skupova (zbirki koje takođe mogu biti elementi drugih zbirki) i klasa (zbirki koje ne mogu biti elementi drugih zbirki) i obezbeđuje da svi objekti koji navode na paradokse (na primer univerzalna klasa) budu svrstani u klase, a ne skupove.

Gödelova teorema potpunosti. Teorema, koju je 1930. prvi uveo Kurt Gödel, o tome da svaka validna dobro obrazovana formula čistog funkcionalnog računa prvog reda jeste teorema tog sistema.

Gödelove teoreme nepotpunosti. Dve teoreme koje je 1931. prvi dokazao Kurt Gödel. Jedna tvrdi da bilo koji ω-konzistentan sistem adekvatan elementarnoj teoriji brojeva jeste takav da postoji validna dobro obrazovana formula tog sistema koja nije dokaziva u tom sistemu. J.B. Rosser, 1936, proširio je ovaj rezultat na bilo koji konzistentan sistem. Druga teorema tvrdi da bilo koji konzistentan sistem koji je adekvatan elementarnoj teoriji brojeva jeste takav da ne može postojati nijedan dokaz konzistencije samog sistema unutar tog sistema.

Gödelovo brojanje. Pripisivanje prirodnog broja svakom od entiteta formalnog sistema. Vidi **aritmetizacija sintakse**.

gust (skup). Odnosi se na takav uređen skup u kojem između bilo koja dva elementa postoji sledeći element tog skupa.

Henkinova teorema potpunosti. Teorema, koju je 1947. dokazao Leon Henkin, po kojoj svaka sekundarno validana dobro obra-

zovana formula čistog funkcionalnog računa drugog reda jeste teorema tog sistema.

hereditarno svojstvo. Vidi **nasleđivanje, relacija n.**

Hilbertov program. Vidi **formalizam**.

hipoteza kontinuuma. Hipoteza, koju je izneo Georg Cantor, da kardinalnost moći skupa nekog skupa čija je kardinalnost alef-nula ($\aleph_0$) jeste alef-jedan ($\aleph_1$) - to jest da ne postoji nijedan skup čija je kardinalnost veća od alef-nula a manja od kardinalnosti moći skupa nekog skupa čija je kardinalnost alef-nula. *Generalizovana hipoteza kontinuuma* jeste hipoteza da za kardinalnost bilo kojeg beskonačnog skupa sledeća najveća kardinalnost je kardinalnost njegove moći skupa.

I-iskaz. U tradicionalnoj logici, partikularno-afirmativni kategorički iskaz. Primer je 'Neki ljudu su smrtni'.

idealna matematika. Za Davida Hilberta, nefinitarni deo matematike koji je, mada nužan, ipak problematičan, te zbog toga zahteva dokaz konzistencije. Vidi **realna matematika**.

idempotencija. Binarna operacija je idempotentna ako i samo ako ta operacija izvedena na bilo kojem elementu sa samim sobom ima kao rezultat sam taj element.

identično istinito. Upotrebljava se u slučaju kada dobro obrazovana formula iskaznog računa ima kao istinosnu vrednost istinitost za svaku moguću vrednost njenih konstituentnih dobro obrazovanih formula.

identično lažno. Upotrebljava se u slučaju kada dobro obrazovana formula iskaznog računa ima kao istinosnu vrednost lažnost za sve moguće vrednosti njenih konstituentnih dobro obrazovanih formula.

identitet. Relacija koja važi jedino kod odnosa objekta sa samim sobom.

identitet nerazličitih (identity of indiscernibles). Leibnizovo načelo po kojem su dva objekta istovetna ako, za svaku klasu, jedan objekat pripada klasi ako i samo ako joj pripada i neki drugi. Ovo ne treba mešati sa onim što je W.V. Quine nazvao *nerazličitost identičnih* (indisceribility of identicals), načelom da ako su dva objekta identična oni pripadaju istim klasama.

identitet, zakon i. Vidi **zakoni mišljenja**.

ignoratio elenchi. Vidi **pogreška**.

ime. U tradicionalnoj logici, reč ili grupa reči koja može služiti kao termin u iskazu. **Opšte** ime (general name) jeste ono koje može biti smisleno primenjeno na svaki član skupa objekata, **pojedinačno** ime (singular name) jeste ono koje može biti smisleno primenjeno samo na jedan objekat, a **kolektivno** ime jeste ono koje može biti smisleno primenjeno na grupu sličnih stvari shvaćenih kao gradivni delovi neke proste celine.

implicitna definicija. Skup aksioma implicitno definiše termin koji je u njima nedefinisan na taj način što obuhvata referencije ovih termina na termin čijem se određenju teži. Aksiome ovo postižu tako što utvrduju uslove koje zadovoljava samo jedan skup objekata.

Ideja da skup aksioma može definisati nedefinisane termine koji se u njima nalaze obično se pripisuje J. D. Gergonneu (1819). Svojevremeno se mislilo da bi temeljni termini mogli biti implicitno definisani aksiomama (zapravo Peanovim postulatima) koji ih sadrže; međutim, sada je poznato da se to ne može učiniti pošto Peanovi aksiomi dopuštaju više od jedne interpretacije.

implikacija (kondicional). Binarni iskazni veznik (—>, ⊃) koji se obično čita kao ´ako - onda´, za koji postoje dve interpretacije. (1) *Materijalna implikacija.* Na osnovu ove interpretacije, ´Ako *A* onda *B*´ je istinito u svim slučajevima izuzev ako je *A* istinito a *B* lažno. (2) *Striktna implikacija.* Na osnovu ove interpretacije, ´Ako *A* onda *B*´ je istinito jedino kada se *B* može dedukovati iz *A*. *Filonovska* implikacija je stoička verzija materijalne implikacije, a *diodorovska* implikacija je stoička interpretacija ´ako - onda´, prema kojoj je ´Ako *A* onda *B*´ istinito ako kada god je (u prošlosti, sadašnjosti, ili budućnosti) *A* istinito, istinito je i *B*.

impredikativna definicija. Definicija objekta pomoću termina nekog totaliteta čiji je on član. Za primer impredikativne definicije vidi **sled, relacija s.**

indemonstrabilije. Stoičko ime za aksiome njihove iskazne logike.

indirektan dokaz (reductio ad absurdum). Argument koji dokazuje iskaz *A* pokazujući da pobijanje *A*, zajedno sa iskazima B_1, B_2, ..., B_n, vodi kontradikciji. Dosledno govoreći, ovo ne uspeva da dokaže istinitost *A* pošto jedna od prethodno usvojenih

premisa može biti lažna; prema tome, snaga ovoga argumenta počiva na upotrebi premisa koje su daleko čvršće osnovane nego što je to pobijanje *A*, tako da će pobijanje *A* biti odbačeno, dok će samo *A* biti prihvaćeno.

individua (partikularija). (1) Bilo šta što je obrazovano kao jedinica. (2) U teoriji tipova, bilo koji član najnižeg tipa.

indukcija po pravcu vrednosti. Takav argument iz matematičke indukcije u kojem se u koraku indukcije dokazuje da 'ako svojstvo *P* važi za sve brojeve ispred *a*, važi takođe i za *a'*, pri čemu je *a* bilo koji broj.

indukcija, matematička. Zaključivanje koje ima oblik '0 ima svojstvo *P*, ako bilo koji prirodan broj *a* ima svojstvo *P* tada njegov sledbenik ima svojstvo *P*, prema tome, svaki prirodan broj ima svojstvo *P*'. Ovaj prvi korak naziva se *osnova* (the basis), ili *nula korak* (the zero step), indukcije, dok se drugi naziva *korak indukcije*.

indukcija. Među prihvatljivim zaključivanjima logičari razlikuju ona kod kojih istovremeno tvrđenje premisa i pobijanje zaključka predstavlja kontradikciju od onih kod kojih ovo istovremeno tvrđenje ne predstavlja kontradikciju. Ova prva su deduktivna zaključivanja; induktivna izvođenja nalaze se u okviru ovih drugih.

Mnogo toga je napisano o pravoj prirodi induktivnih zaključivanja, ali postignuto je tek nekoliko konačnih rezultata. Očigledno da postoji velika raznolikost tipova induktivnih zaključivanja. Dva sasvim različita tipa jesu zaključivanje teorijskih zaključaka na osnovu opažajnih data i zaključivanje o prirodi cele populacije na osnovu prirode primerka.

induktivan skup. Vidi **finitni skup**.

infima species. Vidi **klasifikacija**.

inicijalni ordinal. Ordinal koji nije ekvipolentan sa bilo kojim manjim ordinalom.

inkluzija. Relacija koja važi između dva skupa kada svi članovi jednog jesu članovi drugog. Relacija skup-inkluzija mora se razlikovati od relacije skup-članstvo.

inkonzistentan. Koristi se za skup iskaza iz kojih, ili logistički sistem iz kojeg, se može izvesti kontradikcija.

insolubilia. Srednjovekovno ime za antinomije. Antinomije na koje se obično ovim imenom ukazuje su različite varijante paradoksa Lažac.

intencija, prva (primarna). U srednjovekovnoj logici, za znakove koji označavaju stvari a ne druge znakove kaže se da poseduju prvu intenciju.

intencija, druga (sekundarna). U srednjovekovnoj logici, za znakove koji označavaju druge znakove a ne stvari kaže se da imaju drugu intenciju.

intenzija. Termin koji se ponekad koristi kod tradicionalnih autora sinonimno sa 'konotacija'. U savremenim logičkim radovima 'intenzija' je postala sinonimna sa 'smisao'. Vidi **značenje, Fregeova teorija z.**

intenzionalan. (1) Upotrebljava se za pristup koji u izvesnom smislu razmatra ne samo istinosnu vrednost već i značenje formula. Karakteristika takvih sistema sastoji se u tome što su neki iskazi u njima referencijalno nejasni (opaque). Sistemi modalne logike su obično intenzionalni sistemi.

interpretacija. Interpretacija skupa *A* dobro obrazovanih formula sastoji se od nepraznog skupa (*domena interpretacije*) i funkcije koja svakoj individualnoj konstanti koja se pojavljuje u bilo kojem od članova iz *A* pripisuje neki utvrđeni element tog domena, svakom *n*-mesnom predikatskom slovu koje se pojavljuje u bilo kojem članu iz *A* neku *n*-mesnu relaciju tog domena, a svakom *n*-mesnom funkcijskom slovu koje se pojavljuje u bilo kojem članu iz A neku funkciju čiji su argumenti *n*-torke elemenata tog domena a čije su vrednosti takođe elementi tog domena. Individualne varijable su shvaćene tako da njihov doseg obuhvata elemente tog domena, dok im veznici daju određena značenja. Takva interpretacija određuje značenje članovima iz *A*.

Načelna (the principal) interpretacija je nameravana interpretacija. *Sekundarnu* interpretaciju skupa dobro obrazovanih formula predstavljaju sve interpretacije, osim načelne, koje su takve da su na osnovu njih svi članovi skupa istiniti.

intuitivna teorija skupova. Oblik teorije skupova koja se temeljila na neograničenoj upotrebi aksiome apstrakcije. Unutar sistema intuitivne teorije skupova razvijali su se paradoksi teorije skupova.

inverzija relacije. Vidi **konverzija relacije.**

inverzija. U tradicionalnoj logici, tip neposrednog zaključivanja u kojem se iz datog iskaza izvodi drugi iskaz čiji subjekt predstavlja kontradikciju subjekta prvobitnog iskaza.

isečak skupa. Vidi **segment skupa**.

iskaz (propozicija). Među logičarima ne postoji jednoobrazna upotreba reči 'iskaz'. Mnogi pisci razlikuju iskaz od rečenice; tako, 'Sokrat je bio filozof' i 'Socrates war ein Philosoph' bile bi dve različite rečenice koje izražavaju isti iskaz. Drugi pisci upotrebljavaju 'rečenica' i 'iskaz' kao nešto međuzamenljivo. Da bi izbegli neke od asocijacija reči 'iskaz' neki savremeni filozofi napuštaju ovaj termin u korist termina 'stav'. Ovde će se pretpostaviti da čitalac ima grubu predstavu o tome šta termin 'iskaz' znači. Imajući to u vidu, ovo će se razmatranje ograničiti na shvatanje različitih vrsta iskaza prema razlikama koje su među njima napravili logičari.

Iskazi mogu biti klasifikovani na različite načine. Na početku, treba razlikovati *proste* (ili *atomičke*, ili *elementarne*) iskaze, iskaze koji ne sadrže kao svoje gradivne delove neke druge iskaze, od *složenih* (ili *molekularnih*) iskaza, iskaza koji sadrže druge iskaze kao svoje gradivne delove.

Među prostim iskazima najznačajniji tipovi su *kategorički* (ili *subjekt-predikat*) iskazi, koji potvrđuju ili pobijaju da nešto ima svojstvo ili predstavlja član neke klase, i *relacioni* iskazi, koji potvrđuju ili pobijaju važenje relacije između dva ili više objekata. Kategorički iskaz je *singularan*, kada je njegov subjekt ime neke individue, a *generalan* (opšti), kada je njegov subjekt ime svojstva ili klase, *afirmativan*, kada njegov subjekt afirmiše njegov predikat, i *negativan*, kada njegov subjekt pobija predikat. Opšti kategorički iskaz je *univerzalan* kada govori o svim članovima subjekt klase, ili svim objektima koji imaju svojstvo subjekta, i *partikularan*, kada se govori samo o nekim članovima subjekt klase, ili nekim objektima koji imaju svojstvo subjekta.

Među složenim iskazima najznačajniji tipovi su *alternativni* (ili *disjunktivni*) iskazi, čiji je oblik '*A* ili *B*', *kondicionalni* (ili *hipotetički*) iskazi, čiji je oblik 'Ako *A* onda *B*', *konjunktivni* iskazi, čiji oblik je '*A* i *B*', i *negativni* iskazi, čiji oblik je 'Ne-*A*'. Za mnoge iskaze za koje se čini da su prosti nakon odgovarajuće analize se ispostavlja da su složeni. Takvi su iskazi poznati kao *eksponibilni* (ili reprezentativni) iskazi.

Kant i mnogi logičari koji su ga sledili razlikovali su klasu *beskonačnih* (ili *limitativnih*) iskaza, afirmativne iskaze sa negiranim terminom kao predikatom. Ovo razlikovanje je izazvalo pažnju

mnogih logičara. Široko prihvaćen dodatak našoj klasifikaciji jeste *neodređeni* iskaz, iskaz koji je dvosmislen zbog toga što nije dat nijedan ukazatelj toga da li je on univerzalan ili partikularan. Konačno, modalnosti pružaju dodatna sredstva klasifikovanja iskaza.

iskazna funkcija. Funkcija čiji vrednosni obim se sastoji isključivo od istinosnih vrednosti. Tako '*a* je otac Georgea Washingtona' je istinosna funkcija, pošto za bilo koji argument *a* vrednost cele jedinice jeste istina ili laž, zavisno od toga da li argument jeste ili nije ime oca Georga Washingtona.

iskazni račun. Vidi **račun**.

iskazni veznik. Vidi **veznik**.

isključenje srednjeg (trećeg), zakon i.t. Vidi **zakoni mišljenja**.

istinosna funkcija. Funkcija čiji su i argumenti i vrednosti istinosne vrednosti. Kaže se da je složen iskaz istinosno-funkcionalni iskaz ako veznik, koji je pridružen sadržanim iskazima radi obrazovanja ovog složenog iskaza, ima svoju istinosnu funkciju. U tom slučaju, pošto su jedini argumenti te funkcije istinosne vrednosti, istinosna vrednost složenog iskaza počiva jedino na istinosnim vrednostima iskaza koji su u njemu sadržani.

istinosna tablica (tabela). Tablica koja pokazuje istinosne vrednosti složenog iskaza za svaku moguću kombinaciju istinosnih vrednosti onih iskaza koji su njegovi sastavni delovi.

istinosna vrednost. Jedan od dva apstraktna entiteta, istine i laži, koji je postuliran u fregeovskoj semantici, koji služi kao ukazatelj na istinite i lažne rečenice. U polivalentnoj logici su uvedene dodatne istinosne vrednosti.

istovremeno pobijanje. Binarni iskazni veznik ($\downarrow$) čija istinosna tablica je takva da je '*A* biva pobijano istovremeno sa *B*' istinito ako i samo ako je i *A* i *B* lažno. Istovremeno pobijanje i Shefferova 'crta' funkcija su jedini binarni iskazni veznici koji su odgovarajući za obrazovanje svih istinosno-funkcijskih veznika.

istovremeno zadovoljivo. Kaže se da je klasa dobro obrazovanih formula istovremeno zadovoljiva ako postoji neki neprazan domen individua takav da za sve slobodne varijable u formulama koje su članovi klase postoji barem jedan sistem vrednosti u tom domenu za koji svaka formula u klasi ima istinitu vrednost.

izabrani skup (selection set). Skup koji sadrži jedan član iz svakog podskupa datog skupa.

izračunljiva funkcija. Vidi **Turing-izračunljiv**.

jedan-jedan korespondencija. Relacija **R** takva da za svaki član *a* njenog konverznog domena postoji samo jedan objekat koji je član njenog domena takav da *b***R***a*. Kaže se da jedan-jedan korespondencija *čuva uređenje* (order-preserving) ako su i njen domen i konverzni domen prosto uređeni i ako, za svako *c* i *d* koji su članovi njenog domena i takvi da *c* prethodi *d* u uređenju domena, jeste slučaj da njihove saobrazne slike *e* i *f* u konverznom domenu jesu takve da *e* prethodi *f* u uređenju konverznog domena.

jedan-mnogo korespondencija. Relacija **R** takva da za svaki član *a* njegovog konverznog domena postoji više od jednog objekta *b* koji je član njenog domena takav da *b***R***a*. 'Otac od' je primer jedan-mnogo korespondencije, pošto za svakog člana njenog konverznog domena (svakoga ko ima oca) postoji samo jedan član njenog domena (otac te osobe) takav da je taj član domena otac od člana konverznog domena.

jedinačni skup. Skup sa samo jednim članom.

jednakost. Relacija koja postoji izmedu dva ili više skupova koju neki autori izjednačavaju sa *identitetom* a drugi sa *relacijom ekvivalencije*.

jednoznačan. Lingvistički izraz je jednoznačan ako i samo ako on nema ni ambigvitet niti je ekvivokalan.

jota operator. Operator određenog opisa (definite description), ι. Čita se: 'Jedinstveno _____ takvo da _____'.

kardinalni broj. Objekat *a* koji je pridružen svim i samo onim članovima iz skupa ekvipolentnih skupova. Mnogi se autori ne slažu oko toga šta predstavlja ovaj objekat. *Frege-Russellova definicija* kardinalnog broja se sastoji naprosto u poistovećivanju *a* sa skupom ekvipolentnih skupova.

kardinalnost. Za neki dati skup određeni kardinalni broj koji mu je pridružen.

kategorematički. U tradicionalnoj logici, koristi se za reč koja može biti termin u kategoričnom iskazu. U savremenoj logici koristi se za bilo koji simbol koji ima nezavisno značenje. Primer kategorematičke reči jeste 'čovek'. Uporedi **sinkategorematički**

kategorički iskaz. Vidi **iskaz**.

kategorija. Opšta ili temeljna klasa objekata ili pojmova o čijim članovima se mogu sačiniti tvrdnje koje sadrže njihova izrazita obeležja, a koje se razlikuju od onih tvrdnji o izrazitim obeležjima koje mogu biti sačinjene o ne-članovima te klase. Dva najčuvenija spiska kategorija jesu Aristotelov i Kantov. Aristotelov spisak sadrži supstanciju, kvantitet, kvalitet, relaciju, delovanje, trpljenje, mirovanje, mesto, vreme, položaj i stanje. Kantov sadrži jedinstvo, mnoštvo i opštost (kategorije kvantiteta); realnost, negaciju i ograničenje (kategorije kvaliteta); supstancijalnost, uzročnost i recipročnost (kategorije relacije); i mogućnost, aktualnost i nužnost (kategorije modalnosti).

klasa. (1) Agregat. (2) U teoriji skupova Godela-von Neumanna-Bernaysa, u kojoj postoji razlikovanje između skupova i klasa, klasa je objekat koji može da sadrži članove ali ne može biti član bilo kojeg objekta. Vidi **skup**.

klasifikacija. Dve značajne stvari kojima su se bavili tradicionalni logičari bile su priroda postupka grupisanja individua unutar klasa individua (*species*), ovih klasa u više klase, i tako dalje (postupak klasifikacije), i priroda obrnutog postupka (postupka *deobe*) - razlaganje klase nadole prema njenim potklasama, ovih opet u njihove potklase, i tako dalje, sve dok se najprostije klase sasvim ne razlože na individue koje predstavljaju njene članove.

U postupku klasifikacije polazi se od grupe individua i one se uređuju u klase, nazvane *infimae species*, od kojih nijedna ne može biti razložena na vrstu već samo na individue. Zatim se *infimae species* grupišu u druge klase, kojima su *infimae species* potklase. (Za bilo koju vrstu, klasa čija je ona potklasa naziva se *proximum genus*). Grupisanje se nastavlja sve dotle dok se ne postigne klasa čiji su članovi sve prvobitne individue. To je *summum genus* i kada se ona dostigne tada je postupak klasifikacije okončan. (Sve klase između *infimae species* i *summum genus* zovu se *subaltern genera*.)

U postupku deobe polazi se od *summum genus* i ide se u razlaganju nadole ka njenim potklasama, što se nastavlja sve dok se ne postigne *infimae species*. Konačno, one se razlažu na individue koje čine njene članove.

Za klasifikaciju i deobu je ustanovljeno nekoliko pravila: (1) na svakom koraku može se upotrebiti samo jedno načelo za

razlaganje klasa ili za njihovo grupisanje; (2) nijedna grupa se ne sme izostaviti ni na jednom koraku; (3) ne sme se ispustiti nijedan posredni korak. Kada je primenjeno na deobu, ovo poslednje pravilo poznato je kao pravilo *division non faciat saltum*.

Dihotomija je oblik deobe (ili klasifikacije) u kojem je rod (genus) na svakom stupnju razdeljen na vrste (species) već prema tome da li objekti poseduju ili ne poseduju izvestan skup differentiae. Na ovaj se način dobijaju dve vrste (*proxima genera*) koje se međusobno isključuju a koje zajedno obuhvataju sve članove.

kombinatorička logika. Grana matematičke logike u kojoj su varijable sasvim eliminisane, a njihovo mesto zauzimaju izvesni tipovi funkcija koje su svojstvene za ovu granu logike.

komparabilnost, zakon k. (zakon trihotomije). Načelo u teoriji skupova da je kardinalnost dva skupa uvek komparabilna (-uporediva); to jest za svaka dva skupa *a* i *b*, *a* je veće od *b*, ili jednako sa *b*, ili manje od *b*.

komplement skupa. Skup svih i samo onih objekata koji nisu članovi datog skupa *a*.

kompozicija, pogreška k. Vidi **pogreška**.

komprehenzija, aksioma k. Vidi **apstrakcija, aksioma a**.

komutativnost. Svojstvo relacije *R* koje se sastoji u ekvivalenciji *aRb* i *bRa*, pri čemu su *a* i *b* bilo koji elementi polja *R*.

kondicional. Vidi **implikacija**.

kondicionalni dokaz. Dokaz koji počinje postavljanjem izvesnih asumpcija A_1, A_2, ..., A_n, dedukovanjem *B* iz njih, a potom na bazi toga tvrđenjem istinitosti hipotetičkog iskaza 'ako A_1, onda ako A_2, onda ako ..., onda ako A_n, onda *B*'. *Pravilo kondicionalizacije* jeste pravilo koje dopušta da se na osnovu prethodnih načini ovaj poslednji korak.

konjunkcija. Binarni iskazni veznik (&, Λ, .), koji se obično čita kao 'i', čija istinosna tablica je takva da je '*A* i *B*' lažno kada je *A* ili *B* ili oba lažno, a istinito kada su oba istinita.

konkluzija (zaključak). Ono što je izvedeno iz premisa datog argumenta.

konkretni termin. U tradicionalnoj logici, termin koji predstavlja ime individue, ili individua. Primer takvog termina je 'Sokrat'

konotacija. Vidi **značenje, Fregeova teorija z.**

konsekvenca. Bilo koji iskaz koji može biti dedukovan iz datog skupa iskaza. Tako, kada je dat skup iskaza <*A*, ako *A* onda *B*>, iskaz *B* je konsekvenca tog skupa, pošto on može biti dedukovan iz članova tog skupa na osnovu jedne primene *modus ponensa*.

konsekvent. Deo hipotetičkog iskaza koji sledi posle znaka implikacije ili nakon 'onda'.

konstanta. Simbol koji, u načelnoj interpretaciji, predstavlja ime za nešto određeno, bila to individua, svojstvo, relacija, itd.

konstruktivno postojanje dokaza. Dokaz o postojanju matematičkog objekta koji ima svojstvo *P* koje pruža primer takvog objekta, ili barem metod kojim bi se mogao pronaći takav primer.

kontingentno. Logički moguće. Vidi ***logička mogućnost***.

kontinuitet. Uređena gusta klasa, čiji svi neprazni podskupovi koji imaju gornje ograničenje imaju najmanje gornje ograničenje, ima kontinuitet (ili je kontinuirana).

kontradikcija. Istovremeno tvrđenje i iskaza i njegovog pobijanja.

kontradikcija, zakon k. Vidi **zakoni mišljenja**.

kontradiktornost. Dva iskaza su kontradiktorna ako i samo ako bi njihovo istovremeno tvrđenje bilo kontradikcija. Na primer 'Svi ljudi su smrtni' i 'Neki ljudi nisu smrtni' su kontradiktorni iskazi. Dva termina su kontradiktorna ako skupa iscrpljuju univerzum govora i međusobno se isključuju. Na primer, u domenu prirodnih brojeva različitih od 0, 'paran' i 'neparan' su kontradiktorni termini. Vidi **kontrarnost**.

kontrapozicija. U tradicionalnoj logici, tip neposrednog zaključivanja u kojem se iz datog iskaza zaključuje drugi iskaz koji ima kao svoj subjekt kontradikciju prvobitnog predikata. (Treba imati u vidu to da se u nekim slučajevima time iziskuje promena kvaliteta.) *Parcijalna* (delimična) kontrapozicija pruža novi iskaz koji je isti kao i subjekt prvobitnog iskaza; *potpuna* kontrapozicija daje predikat novog iskaza koji je kontradikcija subjekta prvobitnog iskaza. Postupak kontrapozicije (bilo delimične ili potpune) pruža ekvivalentan iskaz samo onda kada je prvobitan iskaz *A*- ili *O*-iskaz; u slučaju kada je on *E*-iskaz, tradicionalni su logičari držali da se radi o kontrapoziciji *per accidens* (ili

pomoću ograničenja) - to jest kontrapozicija plus promena kvantiteta iskaza od univerzalnog na partikularni - držeći da je obrazovani iskaz ekvivalentan prvobitnom iskazu. Postupak kontrapozicije ne daje ekvivalentan iskaz kada je prvobitan iskaz *I*-iskaz.

kontrarno-s obzirom-na-činjenice (protivčinjenički) kondicional. Kondicionalni iskaz za čiji se antecedent zna da je lažan.

kontrarnost. Primenjena je na dva iskaza koja ne mogu biti oba istinita ali mogi biti oba lažna. Na primer 'Svi ljudi su smrtni' i 'Nijedan čovek nije smrtan' su kontrarni iskazi. Takođe primenjuje se na dva termina kada se oni međusobno isključuju, ali u univerzumu govora ne moraju biti istovremeno i medusobno iscrpljujući. Na primer, u domenu prirodnih brojeva, 'manje od 7' i 'više od 19' su kontrarni termini. Vidi **kontradiktornost**.

konverzija. U tradicionalnoj logici, tip neposrednog zaključivanja kojim se iz datog iskaza izvodi drugi iskaz čiji subjekt je predikat prvobitnog iskaza (kvalitet iskaza ostaje zadržan). Postupak konverzije pruža ekvivalentan iskaz samo kada je prvobitan iskaz *E*-iskaz ili *I*-iskaz; kada se radi o *A*-iskazu tradicionalni logičari su držali da je rec o konverziji *per accidens* (ili pomoću ograničenja) - to jest konverzija plus promena u kvantitetu iskaza od univerzalnog u partikularni. Tako *E*-iskaz 'Nijedan čovek nije besmrtan' daje 'Ništa besmrtno nije čovek', ali *A*-iskaz 'Svi ljudi su smrtni' može se konvertovati samo pomuću ograničenja, dajući 'Neki ljudi su smrtni'. Postupak konverzije ne daje nikakav ekvivalentni iskaz ako je prvobitni iskaz *O*-iskaz.

konverzija relacije (inverzija relacije). Za bilo koju relaciju *R*, relacija $R^{\smile}$ takva da $aR^{\smile}b$ ako i samo ako bRa.

konverzni domen relacije (doseg relacije). Za bilo koju relaciju *R* skup svih objekata *a* tako da postoji objekat *b* takav da bRa.

konzistencija. Skup iskaza poseduje konzistenciju (ili je konzistentan) kada se nijedna kontradikcija ne može dedukovati iz jedinstvene tvrdnje kojom su obuhvaćeni iskazi tog skupa. Logistički sistem je konzistentan kada se u njemu ne može izvesti nijedna kontradikcija. Postoje dve sintaksičke definicije konzistencije logističkog sistema: Alfreda Tarskog, da je sistem kon-

zistentan ako nije svaka dobro obrazovana formula teorema, i E.L. Posta, da je sistem konzistentan ako nijedna dobro obrazovana formula koja sadrži samo jednu iskaznu varijablu nije teorema. Postoji, pored toga, semantička definicija konzistencije, prema kojoj je skup iskaza (ili logistički sistem) konzistentan ako za taj skup iskaza (ili za skup svih teorema tog sistema) postoji model. Ne sme se pretpostaviti da su ove definicije ekvivalentne; u svakom slučaju tamo gde se tvrdi da jesu neophodno je dati dokaz.

kopula. U tradicionalnoj logici, termin koji u kategoričkom iskazu povezuje subjekt i predikat. To je uvek neki oblik glagola 'biti'.

korolar. Iskaz koji toliko očigledno sledi iz teoreme da iziskuje tek neznatnu ili nikakvu demonstraciju.

kvadrat suprotnosti. Dijagramsko predstavljanje onog dela tradicionalnog učenja o neposrednim zaključivanjima između kategoričkih iskaza koje je slovilo kao suprotnost iskaza.

kvalitet iskaza. Odlika koja čini iskaz afirmativnim ili negativnim. Kant, kao i logičari koji su ga sledili, dodao je treći tip, neograničene iskaze. Vidi **iskaz**.

kvantifikacija predikata. Stavljanje znaka, za 'neki' ili 'svaki', ispred predikata nekog iskaza na isti način kao ispred subjekta, predstavljalo je zamisao koju je uveo ser William Hamilton. Ova se ideja sastojala u tome kako bi ono što je implicitno u iskazu u ovom slučaju bilo eksplicitno.

kvantifikator. Operator za koji je istina da i konstanta, ili forma u kojoj je ona upotrebljena, kao i konstanta i forma koja je odatle proizišla, predstavljaju iskaze, ili iskazne forme. Tako, egzistencijalni kvantifikator, kada je pridružen iskazu ili iskaznoj formi *A*, proizvodi novi iskaz ili iskaznu formu '$(\exists a)M$'.

kvantitet iskaza. Odlika koja čini iskaz univerzalnim ili partikularnim. Kant i drugi su utvrdili singularni kao treći, različiti tip kvantiteta.

Lažac, paradoks. Vidi **paradoks, Epimenidov paradoks**.

lekton. Stoičko ime za smisao formule.

lema. Teorema koja je dokazana radi, odnosno u svrhu, dokaza druge teoreme.

logicizam. Učenje, koje su razvili Gottlob Frege i Bertrand Russell, po kojem svi pojmovi matematike mogu biti izvedeni iz logičkih pojmova putem eksplicitnih definicija, a sve teoreme matematike se mogu izvesti iz logičkih aksioma putem čisto logičke dedukcije.

logička fikcija. Prividna denotacija nekog simbola koji zapravo nema denotacije. Formule koje sadrže takve simbole prevodive su u formule koje ne sadrže nijedan simbol, niti čak simbole za koje bi se moglo učiniti da imaju ovu denotaciju.

logička forma. Obično se kaže da se logika bavi formom iskaza ili argumenta, a ne njegovim sadržajem. Međutim, redak je slučaj da je sačinjena precizna distinkcija između forme i sadržaja; zbog toga se ona najbolje može uvideti razmatranjem primera:

Ako pada kiša, ljudi će nositi kišobrane.
Pada kiša.
___
Ljudi će nositi kišobrane.

Analiza ovoga zaključivanja pokazuje da je ono validno zato što ima formu 'Ako *A*, onda *B*; *A*; prema tome, *B*'. Vrednost varijabli ne obrazuje nikakvu razliku u validnosti argumenta. Formalna logika se bavi zaključivanjima, kao što je to ovde slučaj, čija validnost počiva na njihovoj formi.

logička implikacija. Relacija koja važi između dva iskaza kada je jedan izvodiv iz drugog.

Kao što to primer pokazuje, forma iskaza ne predstavlja ništa drugo do proizvod zamenjivanja, unutar iskaza, slobodnih varijabli za konstante, budući da je *sadržaj iskaza* ono što je zamenjeno za varijable. Forma argumenta je proizvod zamenjivanja, u svim premisama i u zaključku argumenta, slobodnih varijabli za konstante.

U nekim savremenim radovima se bilo koja formula koja sadrži jednu ili više slobodnih varijabli naziva formom.

logička istina. Vidi **analitičko**.

logički dijagram. Dijagram koji se koristi zato da bi se predstavile logičke relacije.

logički moguće (moguće istinito). Iskaz koji nije samo-kontradiktoran. Neki autori ovaj termin ograničavaju takođe na one iskaze koji nisu logički nužni.

logički nužno. Vidi **analitičko**.

logički zakon. Bilo koja opšta logička istina.

logika. Proučavanje validnosti različitih vrsta zaključivanja. Ovaj se termin obično koristi sinonimno sa terminom *deduktivna* logika, granom logike koja se bavi zaključivanjima čije premise ne mogu biti istinite a da takođe nije istinit i zaključak. Druga značajna grana logike, *induktivna* logika, bavi se zaključivanjima čije premise mogu biti istinite čak i onda kada je zaključak lažan.

logika drugog reda. Funkcionalni račun drugog reda. Vidi **račun**.

logika prvog reda. Funkcionalni račun prvog reda. Vidi **račun**.

logistički metod. Metod proučavanja neke oblasti putem njene formalizacije.

logistički sistem (formalni sistem). Sistem čije primitivne osnove su eksplicitno utvrđene u određenom metajeziku.

Lombertovi dijagrami. Predstavljanje, koje je uveo J.H. Lombert, relacija među klasama pomoću relacija među pravim linijama.

Löwenheimova teorema. Vidi **Skolem-Löwenheimova teorema**.

major premisa. U kategoričkom silogizmu, premisa koja sadrži major termin.

major termin. U kategoričkom silogizmu, termin koji je predikat zaključka.

matematička indukcija. Vidi **indukcija, matematička**.

materijalna implikacija. Vidi **implikacija**.

metajezik. Jezik koji se koristi da bi se govorilo o objekt-jeziku; *meta-metajezik* je jezik koji se koristi da bi se govorilo o metajeziku, i tako dalje. Svedeno govoreći, za neki iskaz se kaže da je dat u metajeziku ako i samo ako se odnosi na izraz objekt-jezika.

metamatematika (teorija dokaza). Proučavanje logističkog sistema. Neki autori ovaj termin ograničavaju na istraživanja koja se služe finitarnim metodima.

metateorema. Teorema metajezika.

metateorija. Metamatematička istraživanja koja se odnose na neki dati logistički sistem.

metod konstrukcije. Naziv Bertranda Russella za metod uvođenja novih tipova brojeva putem njihovog definisanja pomoću termina prethodno uvedenih brojeva i uobičajene notacije logike i teorije skupova. Nasuprot metodu konstrukcije stoji *metod postulacije*, kod kojeg se uvode novi tipovi brojeva kao primitivni termini sa odgovarajućim aksiomama.

minor premisa. U kategoričkom silogizmu, premisa koja sadrži minor termin.

minor termin. U kategoričkom silogizmu, termin koji je subjekt zaključka.

mnemonički termini. Imena koja su srednjovekovni logičari uveli za validne silogizme. Jedan takav termin je 'Barbara'. Ključ za ove mnemoničke termine je sledeći: Tri samoglasnika na odgovarajući način ukazuju na tri sadržana iskaza silogizma pomoću *A*, *E*, *I*, ili *O*. Za silogizme prve figure početni suglasnici su proizvoljno prva četiri suglasnika; za ostale figure početni suglasnici ukazuju na koje silogizme prve figure određeni silogizam o kojem je reč može biti reduciran. Ostali suglasnici u drugoj, trećoj i četvrtoj mnemoničkoj figuri ukazuju na operaciju koja se mora izvršiti na iskazu ukazanom prethodnim samoglasnikom da bi se reducirala na silogizam prve figure. Ključ za to je sledeći: '*s*' ukazuje na prostu konverziju, '*p*' ukazuje na konverziju *per accidens*, '*m*' ukazuje na metatezu (međusobnu zamenu premisa), '*k*' ukazuje na obverziju, a '*c*' ukazuje na *convertio silogizma* (to jest, silogizam treba redukovati posredno). Kod mnemoničkih termina jedino su bez značenja slova '*r*', '*t*', '*l*', '*n*', kao i '*b*' i '*d*' kada ne stoje na početku. Usavršeniji mnemonički termini bili su namenjeni za silogizme u kojima dve ili više premisa predstavljaju modalnosti.

Mnemonički termini

Ime	*Figura*	*Major premisa*	*Minor premisa*	*Konkluzija*
Barbara	prva	A	A	A
Baroco	druga	A	O	O
Bocardo	treća	O	A	O
Bramantip	četvrta	A	A	I
Camenes	četvrta	A	E	E
Camestres	druga	A	E	E
Celarent	prva	E	A	E
Cesare	druga	E	A	E
Darapti	treća	A	A	I
Darii	prva	A	I	I
Datisi	treća	A	I	I
Dimaris	četvrta	I	A	I
Disamis	treća	I	A	I
Felapton	treća	E	A	O
Ferio	prva	E	I	O
Ferison	treća	E	I	O
Fesapo	četvrta	E	A	O
Festino	druga	E	I	O
Fresison	četvrta	E	I	O

mnogo-jedan preslikavanje. Relacija *R* takva da za svaki element *a* iz njenog domena postoji samo jedan član *b* njemu konverznog domena takav da *aRb*. 'Sin od' je mnogo-jedan korespondencija pošto za svakog člana njenog domena (za svakog sina) postoji samo jedan član konverznog domena (njegov otac) za koji je istinito da je određeni član domena sin određenog člana konverznog domena.

moć skupa. Skup svih podskupova datog skupa.

moć skupa, aksioma m. s. Aksioma teorije skupova koja tvrdi da za bilo koji skup postoji njegova moć skupa.

moć. Vidi **kardinalnost**.

modalna logika. Proučavanje relacija zaključivanja među iskazima s obzirom na njihovu modalnost. Većina logičara sisteme modalne logike tretira kao intenzionalne, bazirajući ih na striktnoj implikaciji. Alternativni pristup jeste razmatranje ovih sistema kao ekstenzionalnih, baziranih na polivalentnoj logici. Pogledaj poglavlje ***MODALNA LOGIKA***.

modalnost. (1) Odlika iskaza prema kojima oni mogu biti opisani kao ´apodiktički´, ´asertorički´, ili ´problematički´. *Asertorički* iskaz tvrdi da nešto jeste slučaj; *apodiktički* iskaz tvrdi da nešto mora biti slučaj; *problematički* iskaz tvrdi da nešto može biti slučaj. Srednjovekovni logičari su ovaj tip modalnosti nazvali *modalnost sine dicto (de re)*.

(2) Odlika iskaza prema kojima mogu biti opisani kao ´nužni´, ´nemogući´, ´mogući´, ili ´ne-nužni´. Srednjovekovni logičari su ovaj tip nazvali *modalnost cum dicto (de dicto)*.

model. Interpretacija datog skupa dobro obrazovanih formula prema kojoj su svi članovi tog skupa istiniti. *Standardni* model saobrazan je sa načelnom interpretacijom, *nestandarni* model je saobrazan sa sekundarnom interpretacijom. Vidi **interpretacija**.

modus. Način klasifikovanja kategoričkih silogizama prema kvantitetu i kvalitetu iskaza koji ulaze u njihov sastav.

modus ponendo tollens. Zaključak čiji oblik je ´Ili *A* ili *B*; *A*; prema tome, ne-*B*´. Ovaj tip zaključka je validan jedino ako se ´ili´ interpretira kao ekskluzivna disjunkcija.

modus ponens. Argument čiji oblik je ´Ako *A* onda *B*; *A*; prema tome, *B*´. Neki autori koriste ovaj termin da bi označili pravilo zaključivanja koje dozvoljava argumente ovog oblika.

modus tollendo ponens. Argument čiji oblik je ´Ili *A* ili *B*; ne-*A*; prema tome, *B*´.

modus tollens. Argument čiji oblik je ´Ako *A* onda *B*; ne-*A*; prema tome, ne-*B*´. Neki autori koriste ovaj termin da bi označili pravilo zaključivanja koje dozvoljava argumente ovog oblika.

multiplikativna aksioma. Vidi **aksioma izbora**.

negacija. Singularni iskazni veznik (¬, ¯, ~, −, N), koji se obično čita kao ´ne´, čija je istinosna tablica takva da je ´ne-A´ istinito ako i samo ako je A lažno.

negacija skupa. Vidi **komplement skupa**.

negativno ime. U tradicionalnoj logici, ime koje implicira za sobom odsustvo jednog ili više svojstava, ili koje označava sve ono iz čega je izuzeta neka pojedinačna stvar ili skup stvari. Primer takvog imena je 'ne-Briton'.

neposredan zaključak. Izvođenje zaključka iz jedne premise. Tradicionalni logičari razmatrali su dva tipa: (1) *opoziciju iskaza*, zaključak, iz istine ili laži jednog iskaza, istine ili laži drugog iskaza koji ima isti subjekt i predikat (takva zaključivanja su povezana sa kontradiktornim, kontrarnim, subalternativnim i subkontrarnim iskazima), i (2) *edukcije*, zaključivanje, iz jednog iskaza, o drugom koji se razlikuje od njega po subjektu, predikatu, ili i jednom i drugom (one su povezane sa obverzijom, konverzijom, kontrapozicijom i inverzijom).

nepridruženi skupovi. Skupovi koji nemaju nijedan zajednički član.

nesavršene figure. Druga i treća silogistička figura, čiji validni argumenti su, prema Aristotelu, takvi da se njihova validnost može znati samo putem njihove redukcije na validne silogizme savršene prve figure.

nezavisnost. Aksioma *A* datog logističkog sistema je nezavisna (ili poseduje nezavisnost), ako i samo ako u sistemu koji je dobijen izostavljanjem *A* iz aksioma datog sistema *A* nije teorema. Pravilo derivacije *R* datog logističkog sistema je nezavisno ako i samo ako u sistemu koji je dobijen izostavljanjem *R* iz pravila derivacije datog sistema *R* nije izvedeno pravilo derivacije.

nivo (red). U razgranatoj teoriji tipova, klasa objekata koja je sastavljena od svih i jedino onih objekata takvih da definicija jednog od njih ne iziskuje referenciju na totalitet koji sadrži ostale članove te klase. Hijerarhija nivoa je izgrađena tako da započinje klasama onih objekata koji mogu biti definisani bez referencije na bilo koji totalitet i nastavlja se sa nivoima koji za ovim slede, pri čemu su članovi svakoga od njih definisani terminima totaliteta objekata prethodnog nivoa.

niz (sekvent). Funkcija čiji je domen podskup, ne nužno i vlastit, skupa prirodnih brojeva. Neki autori ovaj termin proširuju na bilo koju funkciju čiji je domen uređen.

non sequitur. Vidi **pogreška**.

normalni sistem domena. Takav sistem domena da su u njemu aksiome funkcionalnog računa drugog reda validne, a pravila zaključivanja funkcionalnog računa drugog reda u njima služe očuvanju validnosti.

nula skup (prazan skup). Skup koji nema nijednog člana.

nužan uslov. Vidi **uslov**.

nužna istina. Vidi **analitičko**.

O-iskaz. U tradicionalnoj logici, partikularno negativni kategorički iskaz. Primer je 'Neki ljudi nisu smrtni'.

objekt jezik. Jezik koji se upotrebljava kako bi se govorilo o stvarima a ne o drugim jezicima. Svedeno govoreci, kaže se da je iskaz u objekt jeziku ako i samo ako se on ne odnosi na bilo koji lingvistički izraz. Prema tome 'Sokrat je bio filozof' je u objekt jeziku, dok "'Sokrat' ima pet slova" to nije.

obverzija. U tradicionalnoj logici, tip neposrednog zaključivanja u kojem je iz datog iskaza zaključen i drugi iskaz čiji subjekt je istovetan sa prvobitnim, čiji predikat je kontradikcija prvobitnog predikata, a čiji kvalitet je afirmativan ako je kvalitet prvobitnog iskaza negativan i vice versa. Kada se primeni na sva četiri tipa (*A*, *E*, *I* i *O*) iskaza koje su utvrdili tradicionalni logičari, obverzija iskaza pruža ekvivalentan iskaz.

određeni opis, teorija o. o. Određeni opis jeste opis koji se, s obzirom na značenja reči koje su u njemu, može primeniti samo na jedan objekt. Standardni primer određenog opisa jeste 'autor *Waverleya*'*. Teorija određenih opisa, koju je uveo Bertrand Russell, ima za cilj eliminisanje određenih opisa. Za razliku od mnogih drugih eliminativnih teorija, Russellova ne pokušava da pruži način eksplicitnog definisanja određenih opisa. Umesto toga ona pokazuje kako se u bilo kojem datom kontekstu opis zajedno sa kontekstom može eliminisati na taj način što će ishodišni lingvistički izraz biti ekvivalentan sa onim koji je

* U engleskom jeziku to su oni opisi na čiji objekat se ukazuje određenim članom 'the', odnosno, kao što je to u ovom slučaju 'the author of *Waverley*'. U našem jeziku taj smisao bi imali oni opisi koji ukazuju određenom pokaznom zamenicom, kao što su 'ovo je ...', ili 'ova osoba je autor *Weverleya*', itd. - prim. prev.

prvobitno dat. To je razlog zbog kojeg se za Russellovu teoriju kaže da pruža način kontekstualnog definisanja odredenih opisa.

Ukoliko određeni opis simbolizujemo sa ´$(\iota x)\mathbf{P}$´ (´jedinstveno x takvo da **P**´, pri čemu je **P** bilo koji dobro obrazovani izraz), Russellova se teorija može utvrditi na sledeći način (osim ako nije posebno ukazano, pretpostavljaće se da je doseg događanja odredenog opisa najmanji dobro obrazovani deo formule koji sadrži samo dogadanje ovog određenog opisa): predstavimo simbolički doseg određenog opisa sa **M**, a celu formulu sa **A**. **M** je zamenjeno izrazom ´$(\exists y)(z)((\mathbf{P}z \equiv z{=}y)\,.\,\mathbf{M}')$´, pri čemu su y i z prve dve varijable koje se ne dogadaju u **A**, a **M**´ predstavlja ishod zamene y za svako dogadanje ´$(\iota x)\mathbf{P}$´ u **M**. Ishodišna formula, **A**´, ekvivalentna je sa **A** ali gubi određeni opis koji smo želeli da eliminišemo.

Motivacija za ovu teoriju bila je zasnovana na izvesnim teškoćama koje su se postavile pred Russellovu teoriju značenja, teoriju po kojoj značenje termina jeste njegova referencija. Bilo je predloženo, pre svega od strane W.V. Quinea, da, pošto se slične teškoće mogu pojaviti uopšte kada je reč o imenima (imenicama), ova teorija treba da bude proširena na sva imena (imenice). Međutim, Russell je smatrao da postoji klasa imena, *logički osobenih imena* (logically proper names), za koja se ovaj problem ne postavlja; on je prema tome bio skloniji zadržavanju imena koja pripadaju toj klasi.

ograničenje (limit). Za dati niz brojeva, broj a takav da za bilo koji proizvoljno mali broj b veći od 0 postoji broj c takav da za bilo koji broj d veći od c apsolutna vrednost razlike između člana d u nizu i a jeste manja od b.

ogranicenje skupa. Za datu relaciju **R**, *donje* ograničenje (ili prvi element) skupa a jeste bilo koji član iz a koji je u relaciji **R** sa članovima iz a; *gornje* ograničenje skupa a jeste bilo koji član iz a sa kojim su svi članovi iz a u relaciji *R*. *Najveće donje ograničenje* skupa a (ili *infimum* skupa a) jeste donje ograničenje skupa a sa kojim su sva donja ograničenja iz a u relaciji **R**; *najmanje gornje ograničenje* skupa a (ili *supremum* skupa a) jeste gornje ograničenje skupa a koje je u relaciji **R** sa svim gornjim ograničenjima iz a.

omega. Najmanji beskonačni ordinal (označen sa ω), tip poretka pridružen skupu svih prirodnih brojeva uređenih prema svom prirodnom poretku.

omega-kompletan. Upotrebljava se za sistem koji, ako sadrži teoreme o tome da svojstvo *P* važi za 0, za 1, za 2, i tako dalje, sadrži teoremu da *P* važi za sve brojeve.

omega-konzistentan. Upotrebljava se za sistem koji, ako sadrži teoreme o tome da svojstvo *P* važi za 0, za 1, za 2, i tako dalje, ne sadrži teoremu da *P* važi za sve brojeve.

opadajuća indukcija. Argument koji pokazuje da izvesno svojstvo ne važi ni za jedan broj, demonstrirajuci to tako što ako ono važi za bilo koji broj tada ono važi i za broj koji je manji.

operator. Simbol ili kombinacija simbola koja je sinkategorematička s obzirom na načelnu interpretaciju logističkog sistema u kojem se događa i koja može biti upotrebljena sa jednom ili više varijabli, kao i jednom ili više konstanti, ili formula, ili i jednim i drugim, kako bi proizveli novu konstantu ili formulu. Najčešći primeri operatora su univerzalni i egzistencijalni operatori.

opšti termin. Termin koji u istom smislu može predstavljati predikat više od jedne individue.

ordinal ograničenja (limit ordinal). Vidi **broj ograničenja**.

ordinalan broj. Tip uređenja dobro uređenog skupa.

ordinalno slično. Dva ili više skupova su ordinalno slični ako i samo ako između njih postoji jedan-jedan korespondencija očuvanja poretka.

osnovan. Upotrebljava se kod interpretacije logističkog sistema tako što pod određenom interpretacijom sve aksiome ili denotiraju istinu ili uvek imaju vrednost istinito, dok sva pravila zaključivanja održavaju istinitost.

otvorena rečenica. Formula koja sadrži slobodne individualne varijable.

otvorena shema. Formula koja sadrži slobodne individualne i funkcionalne varijable.

par, aksioma p. Aksioma teorije skupova koja tvrdi da za bilo koja dva objekta *a* i *b* postoji skup *c* čiji članovi su jedino *a* i *b*

paradoks (antinomija). Stav čija istinitost vodi kontradikciji kao što kontradikciji vodi i istinitost njegovih pobijanja. Još od F. P. Remseva uobičajeno je razlikovanje između *logičkih paradoksa* (koji se obično nazivaju *paradoksi teorije skupova*), jer se u

njima pojavljuju samo uobičajeni simboli logike i teorije skupova i koji mogu nastati u objekt jeziku, i *semantičkih paradoksa*, jer se u njima pojavljuju semantički pojmovi, a koji mogu nastati u metajeziku.

Najvažniji logički paradoksi jesu sledeći: (1) *Russellov paradoks*. Uzmi skup svih objekata koji nisu sopstveni članovi. Da li je tada taj skup član samog sebe? Ako jeste, tada nije. Ako nije, tada jeste. (2) *Cantorov paradoks*. Uzmi skup svih skupova. Da li je on jednak ili je veći od njegove moći skupa? Ako je jednak, to je kontradikcija, pošto postoji dokaz da je moć skupa bilo kojeg skupa veća od samog skupa. Ako nije, tada postoji kontradikcija, pošto moć skupa bilo kojeg skupa predstavlja skup skupova te prema tome mora biti podskup skupa svih skupova, a postoji dokaz da podskup skupa ne može biti veći od samog sebe. *Burali-Fortijev paradoks*. Uzmi skup svih ordinala. Da li on ima ordinalan broj? Ako nema, to je kontradikcija, pošto je on na osnovu relacije 'manje od' dobro uređen, te postoji dokaz da svi dobro uređeni skupovi imaju ordinalne brojeve. Ako ima, to je kontradikcija, pošto se može dokazati da ordinalan broj skupa mora biti i jednak sa i manji od njegove slike u preslikavanju skupa svih ordinala na skup svih ordinala manjih od sopstvenog ordinala.

Najvažniji medu semantičkim paradoksima su sledeći: (1) *Berryjev paradoks*. Razmotri izraz 'najmanji prirodan broj koji nije moguće imenovati sa manje od 31 sloga'. Da li je broj koji on označava moguće imenovati sa manje od 31 slogova? Ako jeste, to je kontradikcija, pošto to na osnovu definicije ne može biti. Ako nije, to je kontradikcija, pošto možemo proizvesti način njegovog imenovanja koji sadrži 30 slogova - upravo način kojim smo ga imenovali u tvrđenju ovoga paradoksa. (2) *Epimenidov paradoks*. Razmotri rečenicu 'Ova rečenica nije istinita'. Da li je to istina? Ako jeste, tada nije; ako nije, tada jeste. (3) *Grelling-Nelsonov paradoks heterologičnosti*. Predikat je heterologički ako je rečenica koja pripisuje sebi predikat lažna. Da li je 'biti heterološko' i samo heterološko? Ako jeste, onda nije; ako nije onda jeste. (4) *Paradoks Lažac*. Vidi *Epimenidov paradoks* (mada se ovo ime obično koristi kako bi se ukazalo na gotovo istovetan paradoks koji počinje rečenicom 'Ovaj stav izražava laž'). (5) *Richardov paradoks*. Uzmi skup svih brojeva između 0 i 1 čije odlike se mogu odrediti konačnim

brojem engleskih reči. Ovaj skup ima samo prebrojivo mnogo brojeva. Može se pokazati, na način veoma sličan Cantorovom dijagonalnom dokazu, da možemo odrediti pomoću konačnog broja engleskih reči broj koji ne može pripadati ovom skupu. Da li on pripada skupu? Ako pripada, to je kontradikcija, pošto ne može pripadati. Ako ne pripada, to je kontradikcija, pošto se on može odrediti pomoću konačnog broja engleskih reči i svi takvi brojevi pripadaju tom skupu. Vidi poglavlje ***Logički paradoksi***.

paradoksi materijalne implikacije. Ovi takozvani paradoksi sastoje se u činjenici da ako se ´ako ___, onda ___´ shvati u smislu materijalne implikacije tada je bilo koji iskaz ovog oblika istinit ako je antecedent lažan, bez obzira šta stoji na mestu njegovog konsekventa, ili onda ako je konsekvent istinit, bez obzira šta je njegov antecedent. Tako ´Ako je Eisenhower bio premijer Francuske, tada bi trebalo da je mesec načinjen od sira´ i ´Ako je 2+2=17, onda je Bush predsednik Sjedinjenih Država´ i jedno i drugo predstavlja istinite iskaze ako se ´ako-onda´ interpretira u smislu materijalne implikacije.

paralogizam. Bilo koje neispravno rasuđivanje.

parni skup. Skup koji sadrži tačno dva člana.

partikularan. Vidi **individua**.

Peanovi postulati. Sistem od pet postulata iz kojih se može izvesti polazište aritmetike. Postulati su sledeci: (1) 0 je broj; (2) sledbenik bilo kojeg broja je broj; (3) ne postoje dva broja sa istim sledbenikom; (4) 0 nije sledbenik nijednog broja; (5) svako svojstvo koje važi za 0 takođe pripada sledbeniku bilo kojeg broja koji ima to svojstvo koje pripada svim brojevima.

per accidens. Upotrebljava se kod predikacije subjekta jednim od njegovih akcidenata.

per se. Upotrebljava se kod predikacije subjekta jednim od njegovih suštinskih atributa.

petitio principii. Vidi **pogreška, (11) cirkularno rasudivanje**.

podskup. Bilo koji skup *b* takav da su svi članovi iz *b* članovi nekog datog skupa *a*.

pogreška. Kada se argument samo čini validnim mada on to stvarno nije. Postoji mnogi mogući tipovi pogreške; tradicionalni logičari su razmatrali sledeće: (1) *accentus*, pogreška dvosmis-

lenosti, kod koje se dvosmislenost pojavljuje na osnovu stavljanja naglaska (akcenta) na neku reč ili frazu; (2) *afirmacija konsekventa*, argument dobijen na osnovu istinitosti hipotetičkog stava i istinitosti konsekventa koji tvrdi istinitost antecedenta; (3) *dvosmislenost*, argument dat u tom pravcu da je barem jedan i isti termin na različitim mestima upotrebljen sa različitim smislom; (4) *amfibolija*, greška dvosmislenosti kod koje je reč o amfibolijskoj prirodi te dvosmislenosti; (5) *argumentum ad baculum*, argument koji, pozivajući se na silu, uslovljava prihvatanje zaključka; (6) *argumentum ad hominem*, argument koji pokušava da opovrgne istinitost onoga što se tvrdilo napadajući onoga koji je izneo tu tvrdnju, ili pokušaj da se dokaže istinitost toga što se tvrdilo pozivajući se na određene posebne okolnosti u kojima se nalazi oponent; (7) *argumentum ad ignorantiam*, argument po kojem je iskaz istinit zato što se nije pokazalo da je lažan, ili obratno; (8) *argumentum ad misericordiam*, argument koji se poziva na štetu koja proizilazi ukoliko se prihvati zaključak; (9) *aragumentum ad populum*, argument koji se poziva na mnenje svetine; (10) *argumentum ad verecundiam*, argument u kojem je neki autoritet pozvan da sudi o stvarima koje su van oblasti njegovog autoriteta; (11) *cirkularno rasuđivanje*, argument koji kao deo premisa podrazumeva zaključak za koji se pretpostavlja da se na osnovu njih dokazuje; (12) *kompozicija*, argument u kojem se pretpostavlja da celina ima svojstvo samo zato što različiti delovi imaju to svojstvo; (13) *pobijanje antecedenta*, argument u kojem se zaključuje lažnost konsekventa iz istine hipotetičkog iskaza i lažnosti njegovog antecedenta; (14) *deoba*, argument u kojem neko pretpostavlja da različiti delovi imaju svojstvo samo zato što celina ima to svojstvo; (15) *ekvivokacija* (dvosmislenost), argument u kojem se neki dvosmisleni izraz koristi u jednoj premisi u jednom smislu, dok u drugoj premisi, ili konkluziji, u različitom smislu; (16) *ignoratio elenchi*, argument za koji se pretpostavilo da dokazuje jedan iskaz dok zapravo jedino ima uspeha u dokazivanju nekog drugog iskaza; (17) *nedozvoljeni postupak (illiciti processi)* silogistički argument u kojem je termin razdeljen u konkluziji ali ne i u premisama; (18) *previše pitanja*, traženje prostog odgovora na složeno pitanje; (19) *non causa pro causa*, argument koji se sastoji u odbacivanju nekog iskaza zbog lažnosti nekog drugog iskaza za koji se čini da je po-

sledica ovog prvog, mada zapravo on to nije; (20) *non sequitur*, argument u kojem konkluzija nije nužna posledica premisa; (21) *petitio principii*, vidi (11) *cirkularno rasuđivanje*; (22) *post hoc, ergo propter hoc*, argument u kojem se iz premise čiji je oblik 'A prethodi B-u' izvodi konkluziju čiji je oblik 'A je uzrokovalo B'; (23) *quaternio terminorum*, argument silogističkog oblika u kojem se događa četiri ili više termina; (24) *secundum quid*, argument u kojem je iskaz upotrebljen kao premisa a da se nije skrenula pažnja na neki očigledni uslov na osnovu kojega bi primena iskaza bila od uticaja; (25) *nerazdeljen srednji*, silogistički argument u kojem srednji termin nije razdeljen u barem jednoj od premisa.

polisilogizam. Serije tako povezanih silogizama gde je konkluzija jednog premisa sledećeg. U okviru takvih serija za silogizam se kaže da je *polisilogizam* ako je njegova konkluzija premisa onog silogizma sa kojim je on povezan, a da je *episilogizam* ako je neka od njegovih premisa konkluzija onog silogizma sa kojim je povezan. Vidi **sorit**.

polivalentna logika (više-vrednosna logika). Logički sistem u kojem svaka od formula ima više od dve moguće vrednosti.

polje relacije. Unija domena i konverznog domena date relacije.

pominjanje termina. Neko događanje lingvističkog izraza u značima navođenja koje se koristi u govoru o tom lingvističkom izrazu. Na primer, kod "'Ciceron' ima sedam slova", ono što se razmatra nije sam orator već određena reč koja na njega referira.

Ovo treba staviti nasuprot *upotrebe termina*, određenog događanja termina lingvističkog izraza koje se koristi u govoru o nečemu što nije sam taj izraz.

poročni krug, načelo p.k. Načelo circulus viciosus. Vidi **Russellovo načelo poročnog kruga**.

posredno zaključivanje. Zaključivanje u kojem konkluzija sledi iz dve ili više premisa.

post hoc, ergo propter hoc. Vidi **pogreška**.

postulat. Mada je često upotrebljen sinonimno sa 'aksioma', ovaj termin je ponekad ograničen na temeljne iskaze neke pojedinačne discipline, pri čemu su aksiome temeljni iskazi zajednički za sve discipline (na primer, zakoni logike). Ova se

distinkcija javlja kada nije reč samo o formalnom sistemu već takođe i o njegovoj interpretaciji.

postuliranje, metod p. Vidi **metod konstrukcije**.

potencijalna beskonačnost. Beskonačnost shvaćena kao granični pojam, pre kao nešto što je u postupku nastajanja nego kao nešto već potpuno.

potpuni skup. Skup čiji svi članovi su njegovi podskupovi.

potpunost (kompletnost). Reč 'potpunost' se upotrebljava u različitom smislu. U najstrožijem smislu (E.L. Post) kaže se da je logistički sistem potpun ako i samo ako za svaku dobro obrazovanu formulu *A*, ili je *A* teorema tog sistema ili bi sistem bio nekonzistentan kada bi se dodalo *A* kao njegov aksiom (a da se pri tome u njemu ništa drugo ne menja); u ovom smislu iskazni račun je potpun, mada to nije i funkcionalni račun prvog reda. U drugom, širem smislu (Kurt Godel), kaže se da je logistički sistem potpun ako i samo ako su sve valjane dobro obrazovane formule teoreme tog sistema; u ovom smislu i iskazni račun i čisti funkcionalni račun prvog reda jesu takođe potpuni. U trećem, još širem smislu potpunosti se kaže da je logistički sistem potpun ako i samo ako su sve sekundarno validne dobro obrazovane formule teoreme tog sistema; u ovom smislu potpuni su i čisti funkcionalni račun drugog reda kao i funkcionalni računi višeg reda.

povlačenje (entailment). Relacija koja postoji između dva iskaza od kojih je jedan izvodiv iz drugog.

pragmatika. Vidi **semantika, formalna**.

pravila formiranja. Za neki dati logistički sistem, pravila koja određuju koje kombinacije simbola su dobro obrazovane a koje nisu.

pravilo zaključivanja (pravilo transformacije). Za dati logistički sistem, bilo koje pravilo dato u svojem metajeziku čiji je oblik 'Iz dobro obrazovanih formula čiji je oblik A_1, A_2, ..., A_n, dopušteno je izvesti dobro obrazovanu formulu čiji oblik je *B*'.

pravilo transformacije. Vidi **pravilo izvođenja**.

prazan skup. Vidi **nula skup**.

prebrojiv (denumerable) skup. Skup čija kardinalnost je alephnula ($\aleph_0$). Neki autori proširuju 'denumerabilan' tako da ga čine sinonimnim sa 'enumerabilan'.

predikabilije. Klasifikacija stvari i pojmova kao predikata subjekta, koju je prvi načinio Aristotel. Njegove četiri predikabilije su definicija, rod (u koji je on uključio i differentia), proprium i akcidencija. Srednjovekovni logičari, sledeći Porfirija, pružili su listu od pet predikabilija - vrsta, diferencija, rod, proprium i akcidencija - koje su tradicionalni logičari najvećim delom bili usvojili.

Za Aristotela se termin definiše pomoću utvrđivanja *suštine* objekta koji ona imenuje (ovaj stav se naziva *definicija*). Suština stvari je ono svojstvo koje čini tip upravo one stvari o kojoj je reč, a ne neki drugi. Suština ima dva aspekta: *genus* (ili rod) je ono što je suštinska predikabilija takođe i drugih stvari, a *differentia* je ono što suštinski poseduju samo stvari jednog tipa (članovi jedne vrste) a što ne poseduju i stvari drugog tipa. Tako u 'Čovek je racionalna životinja' genus je 'životinja', a differentia je 'biti racionalan'.

Aristotel je pravio razliku između suštine stvari i drugih svojstava koja pripadaju samo tom tipu stvari ali nisu deo njegove suštine; takvo svojstvo je nazvano *proprium*. Precizan način za koji se on nadao da obrazuje ovu razliku nije sasvim jasan. On je takođe imao u vidu da stvar može imati svojstvo koje joj nije neophodno. Takvo svojstvo nazvao je *akcidencija*.

predikacija. Pripisivanje nekog svojstva subjektu.

predikat. Tradicionalno, reč ili grupa reči u kategoričkom iskazu koja konotira svojstvo koje je pripisano subjektu, ili denotira klasu u koju je subjekt uključen ili iz koje je isključen. U savremenim radovima ovaj je termin obično proširen kako bi njime bile obuhvaćene sve reči ili grupe reči koje konotiraju svojstva ili relacije koje su prisutne u nekom tipu iskaza. Tako u 'Svi ljudi su smrtni' predikat je 'smrtni'.

predikatski račun. Vidi **račun**.

premisa. Član skupa iskaza koji se pretpostavlja u argumentu iz kojega je izvedena konkluzija.

presek skupova (proizvod skupova). Skup svih objekata koji su elementi svih skupova $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (simbolički '$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n$')

intuicionizam. Učenje, koje su razvili L.E.J. Brouwer i njegovi sledbenici, čija ključna teza jeste da matematički entiteti sa posebnim svojstvima postoje samo ako se za njih može dati kon-

struktivni dokaz postojanja. Kao rezultat toga iz matematike je odbačena aktualna beskonačnost, a jedino su dozvoljeni prebrojivi (denumerabilni) beskonačni skupovi, sagledani kao potencijano beskonačni. Štaviše, zakon isključenja srednjeg je odbačen u tom smislu da kada se radi o beskonačnim klasama opovrgavanje dokaza nekog univerzalnog stava nije automatski i dokaz stava koji ga pobija - to jest egzistencijalnog stava.

preslikavanje jednog skupa na drugi. Jedan-jedan korespondencija između dva skupa čiji domen je prvi skup a čiji konverzni domen je drugi skup.

preslikavanje jednog skupa u drugi. Jedan-jedan korespondencija između dva skupa čiji domen je prvi skup a čiji konverzni domen je odgovarajući podskup drugog skupa.

predstavnik kardinalnog broja. Skup koji ima dati kardinalan broj kao svoju kardinalnost.

primitivna osnova. Spisak koji sadrži primitivne simbole, pravila formiranja, aksiome i pravila zaključivanja nekog datog logističkog sistema.

primitivni simboli. Oni simboli datog logističkog sistema koji su nedefinisani i koji nisu predstavljeni odvojeno s obzirom na svoju funkciju unutar tog sistema. Sledeći Johna von Neumanna, ovi se simboli mogu podeliti u konstante, varijable, veznike, operatore i simbole koji imaju ulogu zagrada.

primitivno ime. Ime koje podrazumeva odsustvo nekog svojstva na onom mestu na kojem je ono stajalo ili onde gde se može očekivati da stoji.

prirodan broj. Član izvesnog podskupa kardinalnih brojeva. Postoje različiti načini definisanja ovog podskupa kako bi on sadržao sve i samo željene objekte (naime, 0, 1, 2, 3, ...); najčešći način jeste da se definiše kao skup svih objekata koji pripadaju svim skupovima koji sadrže 0 i koji su zatvoreni relacijom 'biti sledbenik od'.

problem odlučivosti. Problem pronalaženja algoritma (*procedura odlučivanja*) koji omogućuje da se postigne, u konačnom broju koraka, odgovor na bilo koje pitanje koje pripada datoj klasi pitanja. Za logistički sistem posebno, to je problem pronalaženja procedure odlučivanja za određivanje za bilo koju proizvoljnu dobro obrazovanu formulu tog sistema da li ona jeste ili nije teorema tog sistema.

Pozitivno rešenje problema odlučivosti sastoji se u dokazu da postoji procedura odlučivanja. Negativno rešenje problema odlučivosti sastoji se u dokazu da takva procedura nije moguća. Primer pozitivnog rešenja jeste dokaz da istinosna tablica pruža proceduru odlučivanja za iskazni račun; primer negativnog dokaza jeste Churchova teorema.

problematički iskaz. Vidi **modalnost**.

procedura odlučivanja. Vidi ***problem odlučivosti***.

proizvod skupa. Vidi **presek skupova**.

varijabla. Simbol koji s obzirom na načelnu interpretaciju nije ime nekog partikularnog objekta, već je pre neodređeno ime koje se može odnositi na bilo koji objekat neke klase stvari.

proprium. Vidi **predikabilije**.

prosilogizam. Vidi **polisilogizam**.

prost termin. Termin koji je u određenom smislu u kojem je upotrebljen određen predikatom samo jedne individue. Na primer, bilo koji određeni opis je prost termin.

prost veznik. Vidi **veznik**.

protivčinjenički kondicional. Vidi ***kontrarno-s obzirom-na-činjenice kondicional***.

prototetički. Oblik proširenog iskaznog računa, koji je prvi uveo Stanislaw Lesniewski, kojem su bile dodate varijable čije vrednosti su istinosne funkcije kao i notacija za primenu funkcija njegovom argumentu ili argumentima, a u kojem je dopušteno da kvantifikatori imaju varijable bilo koje vrste kao operatorske varijable. U višoj *prototetici* dodate su varijable čije vrednosti su iskazne funkcije istinosnih funkcija.

proximum genus. Vidi **klasifikacija**.

prvi element skupa. Vidi **ograničenje skupa**.

Quineove teorije skupova. Grupa teorija skupova koje je predložio W.V. Quine, kombinujući neka svojstva teorije tipova sa nekim svojstvima Zermelo-Fraenkelove i Gödel-von Neumann-Bernaysove teorije skupova. Kao u teorijama skupova, nije zadržana aksioma apstrakcije u njenoj punoj snazi, a pravila formiranja intuitivne teorije skupova nisu modifikovana; kao u teoriji tipova, upotrebljen je pojam stratifikacije, pošto u izvesnim ključnim aksiomama jedino stratifikovane formule generišu skupove.

racionalan broj. Broj koji se može predstaviti u obliku *a/b*, pri čemu je *a* bilo koji ceo broj a *b* bilo koji prirodan broj.

račun. Bilo koji logistički sistem. Dva najznačajnija tipa logičkih računa su *iskazni* (ili rečenički) računi i *funkcionalni* (ili predikatski) računi. Iskazni račun je sistem koji sadrži iskazne varijable i veznike (neki takođe sadrže i iskazne konstante), ali ne i individualne ili funkcionalne varijable ili konstante. U *proširenom* iskaznom računu, dodati su kvantifikatori čije operatorske varijable jesu iskazne varijable. Od *parcijalnih* iskaznih računa, u kojima se ne mogu dobiti sve teoreme standardnog iskaznog računa, najznačajniji je *pozitivni* iskazni račun Davida Hilberta (koji sadrži sve one delove standardnog iskaznog računa koji su nezavisni od negacije) i *intuicionistički* iskazni račun (u ovom sistemu su pozitivnom iskaznom računu dodate one aksiome sa negacijom koje su prihvatljive sa intuicionističkog stanovišta). Funkcionalni račun je sistem koji sadrži, kao dodatak simbolima iskaznog računa, individualne i funkcionalne varijable i/ili konstante, kao i kvantifikatore koji preuzimaju neke od ovih varijabli i konstanti kao operatorske varijable. U funkcionalnom računu *prvog reda* (ili *logici prvog reda*) kvantifikatori kao svoje operatorske varijable imaju jedino individualne varijable, dok funkcije kao svoje argumente imaju samo individualne varijable i/ili konstante. U funkcionalnom računu *drugog reda* (ili *logici drugog reda*) operatorske varijable kvantifikatora mogu da budu funkcionalne varijable. Nakon njega, svaki neparan red dodaje funkcionalne varijable i/ili konstante čiji su neki od argumenata takvog tipa kakav je uveden dva reda ranije, a svaki od parnih redova dopušta upotrebu takvih varijabli koje su uvedene jedan red ranije kao operatorske varijable za kvantifikatore. Kada nijedna od individualnih varijabli ili funkcionalnih konstanti nije prisutna funkcionalni račun se naziva *čistim*; kada je bilo koja od njih prisutna on se naziva *primenjenim*.

razdeljeni termin. U kategoričkom iskazu je događanje termina razdeljeno ako i samo ako termin koji je upotrebljen u tom događanju obuhvata sve članove klase koju označava. U univerzalnom kategoričkom iskazu razdeljen je subjekt; u negativnom kategoričkom iskazu je razdeljen predikat.

razlika skupova. Za bilo koja dva skupa *a* i *b*, skup svih i samo onih objekata koji su članovi *a* ali ne i *b*.

realan broj. Bilo koji broj koji može biti predstavljen decimalom koji nije konačan.

realna matematika. Za Davida Hilberta, onaj deo matematike čiji karakter je finitarni, koja prema tome ima jasno i intuitivno značenje i koja ne sadrži nijedan problem koji se tiče njenog zasnivanja, izuzev kada je reč o činjenici da se, kada joj je pridružena idealna matematika, pojavljuje mogućnost inkonzistencije. Vidi **idealna matematika**.

rečenički račun. Vidi **račun**.

rečenički veznik. Vidi **veznik**.

red. Vidi **nivo**.

reducibilnost, aksioma r. Aksioma, koju su uveli Bertrand Russell i A.N. Whitehead u *Principia Mathematica*, koja govori o tome da za bilo koju iskaznu funkciju proizvoljnog nivoa postoji formalni ekvivalent u iskaznoj funkciji prvog nivoa.

reductio ad absurdum. (1) Vidi **indirektan dokaz**. (2) Metod dokazivanja iskaza pokazivanjem da njegovo pobijanje vodi kontradikciji. U tom smislu obično je poznat kao **reductio ad imposibile**.

redukcija silogizama. Postupak kojim oni silogizmi koji se nalaze u nesavršenim figurama bivaju izraženi prvom figurom. Redukcija je *direktna* kada prvobitana konkluzija sledi iz premisa prve figure, dobijenih izvođenjem iz premisa nesavršene figure putem njihove konverzije, obverzije, itd. Redukcija je *indirektna* kada se novi silogizam obrazuje na taj način da se validnost prvobitne konkluzije utvrđuje tako što se pokazuje nelegitimnost njegove kontradikcije.

referencija. Vidi **značenje, Fregeova teorija z.**

referencijalna nejasnost. Događanje reči ili niza reči takvih da se ta reč ili niz reči ne može u potpunosti zameniti drugom reči ili nizom reči koji ukazuju (reffers) na određenu istu stvar, a da se pri tome zadrži i istinosna vrednost rečenice u kojoj su sadržani. Na primer, mada je '9 je nužno veće od 7' istinito, ishod zamenjivanja '9' nizom reči koje ukazuju na istu tu stvar, kao što je 'broj planeta', jeste lažan iskaz 'Broj planeta je nužno veći od 7'. Prema tome, u ovom događanju '9' je referencijalno nejasno.

refleksivan skup. Vidi **finitni skup**.

refleksivna relacija. Vidi **relacija**.

regularnost, aksioma r. Vidi **fundacija, aksoma f.**

rekurzivan skup. Skup koji je prebrojan (uključujući i ponavljanja) pomoću opšte rekurzivne funkcije i čiji je komplement takođe prebrojan (uključujući i ponavljanja) pomoću opšte rekurzivne funkcije.

rekurzivna funkcija. Postoje različiti tipovi rekurzivnih funkcija. Da bismo ih objasnili prvo moramo uvesti izvesnu terminologiju; *konstanta-funkcija* jeste funkcija koja ima istu vrednost za sve svoje argumente; *sledbenik-funkcija* kao svoju vrednost za dati argument ima sledbenika te funkcije; *identitet-funkcija* jeste funkcija *n* argumenata čija vrednost je uvek argument koji nosi određeni indeks *i*. Sve takve funkcije poznate su kao *temeljne* (ili, *fundamentalne*) *funkcije*.

Funkcija *n* argumenata definisana je putem *kompozicije*, za bilo koji dat skup prethodno uvedenih funkcija *n* argumenata, kada je vrednost nove funkcije jednaka vrednosti prethodno uvedene funkcije čiji argumenti u bilo kojem pojedinačnom slučaju jesu vrednosti svakog od članova skupa funkcija kada njihovi argumenti predstavljaju argumente novouvedenih funkcija u tom pojedinačnom slučaju. Simbolički, kada je *P* nova funkcija koja je određena putem kompozicije, $P(a_1, a_2, ..., a_n) = R(S_1(a_1, a_2, ..., a_n), S_2(a_1, a_2, ..., a_n) ..., S_m(a_1, a_2, ..., a_n))$, pri čemu su R i $S_1, S_2, ..., S_m$ prethodno uvedene funkcije.

Funkcija je definisana putem *rekurzije* u sledećim okolnostima: (1) Za slučaj kada je neki od njenih argumenata 0, funkciji se pripisuje vrednost terminima prethodno uvedenih funkcija čiji su argumenti, izuzev za 0, u bilo kojem pojedinačnom slučaju svi i samo argumenti nove funkcije u tom pojedinačnom slučaju. Simbolički, tamo gde je *P* nova funkcija, a *R* prethodno uvedena funkcija, $P(a_1, a_2, ..., a_n, 0) = R(a_1, a_2, ..., a_n)$. (2) Kada 0 nije jedan od njenih argumenata i kada je neki od njenih argumenata sledbenik bilo kojeg broja *b*, nova funkcija je data u terminima prethodno uvedene funkcije *S*, čiji su argumenti, izuzev za sledbenika od *b*, u bilo kojem pojedinačnom slučaju svi argumenti novouvedene funkcije, zatim samo *b*, kao i vrednost nove funkcije kada su njeni argumenti svi i samo oni argumenti koji su već dati za *S*. Simbolički, $P(a_1, a_2, ..., a_n, b+1) = S(a_1, a_2, ..., a_n, b, P(a_1, a_2, ..., a_n, b))$.

Bilo koja numerička funkcija koja predstavlja neku temeljnu funkciju ili koja se može dobiti, pomoću kompozicije ili putem rekurzije ili na oba ova načina, iz temeljnih funkcija konačnim nizom definicija, jeste *primitivna rekurzivna numerička funkcija*. Funkcija P uvedena je pomoću *operatora najmanjeg broja* ako je njena vrednost za dati skup argumenata najmanji broj b takav da je vrednost prethodno uvedene funkcije R, čiji argumenti u bilo kojem pojedinačnom slučaju jesu argumenti P-a za taj slučaj zajedno sa b, jednaka sa 0 pod uslovom da postoji takvo b, ukoliko nijedno takvo b ne postoji za te je argumente funkcija nedefinisana. Simbolički, $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ = najmanje b takvo da $R(a_1, a_2, ..., a_n, b) = 0$, pod uslovom da postoji b takvo da $R(a_1, a_2, ..., a_n, b) = 0$. Bilo koja numerička funkcija koja je ili temeljna funkcija ili se može dobiti iz temeljnih funkcija pomoću konačnog niza definicija putem kompozicije, rekurzije i funkcije najmanjeg operatora (kada je onaj operator upotrebljen u definisanju opšte rekurzivne funkcije, mora biti slučaj da za svako $a_1, a_2, ..., a_n$ postoji b takvo da je $R(a_1, a_2, ..., a_n, b) = 0$, *opšta rekurzivna numerička funkcija*.

rekurzivno prebrojiv. Koristi se za skup ili klasu koja je prebrojana (uključujući i ponavljanja) putem opšte rekurzivne funkcije. To jest, postoji opšta rekurzivna funkcija čiji konverzni domen ima iste članove kao skup čiji je domen skup prirodnih brojeva.

relacija. U tradicionalnoj logici ovaj termin nije definisan na odgovarajući način. Propust da se pruži adekvatna definicija može se uočiti u nedostatku ozbiljnog razmatranja, od strane tradicionalnih logičara, značajnih razlika između kategoričkih i relacionih iskaza. Augustus De Morgan i C.S. Peirce bili su prvi logičari savremenog perioda koji su ispitivali logiku relacionih iskaza. Od njihovog vremena ovaj predmet je postao važan deo logike. U savremenim radovima, posebno u radovima o teoriji skupova, relacija je određena kao skup uređenih parova.

Relacija **R** je *refleksivna* ako ´*a***R***a*´ važi za svako *a* koje je član polja **R**, *irefleksivna* ako ´*a***R***a*´ ne važi ni za jedan član polja **R**, a *nerefleksivna* ako ´*a***R***a*´ važi za neke ali ne sve članove polja **R**. Na primer, ´jeste član iste porodice kao i´ je refleksivna relacija, ´nije član iste porodice kao i´ je irefleksivna relacija, a ´voli´ je nerefleksivna relacija.

Relacija **R** je *simetrična* ako za svako *a* i *b* koji su članovi polja **R**, *a***R***b* ako i samo ako *b***R***a*, *asimetrična* ako za svako *a* i *b* koji su članovi polja **R**, *a***R***b* ako i samo ako ne-*a***R***b*, a *nesimetrična* kada *a***R***b* i *b***R***a* važi za neke ali ne i svako *a* i *b* koji su članovi polja **R**. Na primer, 'je član iste porodice kao i' je simetrična relacija, 'je dete od' je asimetrična relacija, a 'je brat od' je nesimetrična relacija.

Relacija **R** je **tranzitivna** kada za svako *a*, *b* i *c* koji su članovi polja **R**, ako *a***R***b* i *b***R***c*, onda *a***R***c*, *intranzitivna* kada za svako *a*, *b* i *c* koji su članovi polja **R**, ako *a***R***b* i *b***R***c*, onda ne-*a***R***c*, a *netranzitivna* kada ako *a***R***b* i *b***R***c*, onda '*a***R***c*' važi za neke ali ne i za sve *a*, *b* i *c* koji su članovi polja **R**. Na primer, 'je naslednik od' je tranzitivna relacija, 'je dete od' je intranzitivna relacija, a nije brat od' je netranzitivna relacija.

Za prethodne klasifikacije se kaže da se odnose na relaciju nekog skupa ako odgovarajuća svojstva važe za sve članove polja relacije, a koji su članovi tog skupa. Relacija je u skupu *konektivna* ako za svako različito *a* i *b* koji su članovi tog skupa ili *a***R***b* ili *b***R***a*.

Izučavanje relacionih iskaza je podstaklo na mnoga filozofska pitanja - i velikoj meri uticalo na diskusije o starijim pitanjima - o prirodi relacija.

Richardov paradoks. Vidi **paradoks**.

rod. Vidi **predikabilije**.

Russellov paradoks. Vidi **paradoks**.

Russellova teorija odredenih opisa. Vidi *odredeni opis, teorija o. o.*

Russellovo načelo poročnog kruga. Načelo prema kojem nisu dopuštene impredikativne definicije.

sadržaj iskaza. Vidi **logička forma**.

samokontradikcija. Iskaz koji sve u svemu i tvrdi i pobija neki drugi iskaz.

savršena figura. Prva figura silogizma. Prema Aristotelu, ovo je jedina figura na koju je *dictum de omni et nullo* primenljiv neposredno.

Schröder-Bersteinova teorema. Teorema, koju je prvi izneo Georg Cantor, a dokazali Felix Bernstein i Ernst Schroder, koja tvrdi da ako su *a* i *b* takvi skupovi da je *a* ekvipolentno sa

podskupom *b* a *b* je ekvipolentno sa podskupom *a*, onda su *a* i *b* ekvipolentni.

segment skupa (**isečak skupa**). Podskup datog skupa uređen pomoću date relacije čiji članovi su oni članovi skupa koji prethode datom članu u datom uređenju.

sekundarno validno. Koristi se za dobro obrazovanu formulu koja je validna u svakom normalnom sistemu domena.

sekundarno zadovoljivo. Koristi se za dobro obrazovanu formulu koja je zadovoljiva u nekom normalnom sistemu domena.

semantičko pravilo. Bilo koje pravilo u metajeziku koje se tiče značenja izraza u objekt jeziku.

semantika, formalna (**semiotika**). Izučavanje lingvističkih simbola. Sledeći C.W. Morrisa, uobičajeno je izvršiti podelu formalne semantike na tri oblasti: (1) *Sintaksu*, izučavanje relacija između simbola. Izučavanje načina na koje se simboli datog jezika mogu kombinovati tako da obrazuju dobro obrazovane formule predstavlja jedan deo sintakse. (2) *Semantika*, izučavanje interpretacije simbola. Sledeći W.V. Quinea, uobičajeno je praviti razliku između teorije referencije, koja proučava referenciju ili denotaciju simbola, i teorije značenja, koja proučava smisao ili konotaciju simbola. (3) *Pragmatika*, izučavanje relacija između simbola, korisnika simbola i okruženja korisnika. Tako, izučavanje uslova u kojima govornik koristi datu reč predstavlja deo pragmatike.

Shefferova crta-funkcija (**alternativno pobijanje**). Binarni iskazni veznik (|), čija istinosna tablica je takva da '*A* crta-funkcija *B*' jeste lažna ako i samo ako su i *A* i *B* oba istinita. Shefferova crta-funkcija i istovremeno pobijanje jedini su binarni iskazni veznici koji su odgovarajući za izgradnju svih istinosno-funkcionalnih veznika.

silogizam. Validan deduktivni argument koji ima dve premise i konkluziju. Ovaj termin je obično ograničen na slučaj kada su i obe premise i konkluzija kategorički iskazi koji unutar sebe imaju tri i samo tri termina. Pažljiviji autori ovaj slučaj razlikuju ukazujući na njega kao na *kategorički* silogizam. *Hipotetički* silogizam je onaj čije su premise i konkluzije hipotetički iskazi, a *disjunktivni* silogizam je onaj čije premise i konkluzije su disjunktivni iskazi. Sva tri ova slučaja, gde su sve tri premise

istog tipa, jesu *cisti* silogizmi. *Mešoviti* silogizam je onaj u kojem se događa barem dva tipa iskaza.

Pojačan silogizam je onaj u kojem bi se ista konkluzija mogla dobiti čak i ako neku od premisa koja je univerzalni iskaz zamenimo nekom koja je u odnosu na nju u subalterniranom položaju. Tako silogizam čije premise su 'Svi ljudi su smrtni' i 'Svi igrači bejzbola su ljudi' a čija konkluzija je 'Neki igrači bejzbola su smrtni' jeste pojačan silogizam, pošto bi dovoljno bilo da kao premisu ima 'Neki igrači bejzbola su ljudi'. *Oslabljen* silogizam je onaj čije premise impliciraju univerzalan iskaz ali čija konkluzija je u subalterniranom položaju u odnosu na taj univerzalni iskaz. Gornji primer je takođe i primer za oslabljen silogizam pošto premise, tako kako stoje, impliciraju 'Svi igrači bejzbola su smrtni'.

simbol, nevlastit s. Simbol koji je kategorematički s obzirom na načelnu interpretaciju logističkog sistema u kojem se događa. Primer takvog simbola je 'i'.

simbol, vlastit s. Simbol koji je kategorematički s obzirom na načelnu interpretaciju logističkog sistema u kojem se događa. Bilo koja individualna konstanta je vlastit simbol.

simetrična relacija. Vidi **relacija**.

sinkategorematički. U tradicionalnoj logici, koristi se za upotrebu neke reči koja ne može biti termin u kategoričkom iskazu i koja mora biti upotrebljena zajedno sa terminom kako bi ušla u kategorički iskaz. Primer toga jeste 'svi'. U savremenoj logici ovaj termin ukazuje na bilo koji simbol koji nema nikakvo nezavisno značenje i svoje značenje stiče samo kada je pridruženo drugim simbolima. Uporedi, **kategorematički**.

sintaksa. Vidi **semantika, formalna**.

sintaksička varijabla. Varijabla čiji doseg obuhvata imena simbola i formule.

sintetički. Upotrebljava se za iskaze koji nisu ni analitički ni samo-kontradiktorni.

sistematska neodređenost (tipična neodređenost). Konvencija, koju su uveli Bertrand Russell i A.N. Whitehead, pri kojoj nije određen tip ili red kojoj varijable u formuli pripadaju. Na taj način je dopušteno da jedna formula predstavlja beskonačan broj formula, zapravo sve one formule koje su sasvim nalik njoj s

tom razlikom da su njihove varijable pripisane redovima ili tipovima na takav način da je obrazovana formula dobro obrazovana s obzirom na pravila formiranja razgranate teorije tipova.

Skolem-Löwenheimova teorema. Godine 1915, Leopold Lowenheim je dokazao da ako je dobro obrazovana formula validna u prebrojivo beskonačnom domenu - ona je validna u svakom nepraznom domenu. Korolar tome je da ako je dobro obrazovana formula zadovoljiva u bilo kojem nepraznom domenu - ona je zadovoljiva u prebrojivo beskonačnom domenu. Godine 1920, Thoralf Skolem je ovaj korolar uopštio - i tako upotpunio teoremu - tako što je dokazao da ako je klasa dobro obrazovanih formula istovremeno zadovoljiva u nepraznom domenu - tada je ona istovremeno zadovoljiva u prebrojivo beskonačnom domenu.

Skolemov paradoks. Prividno paradoksalna činjenica da sistemi u kojima je Cantorova teorema dokaziva, a koji prema tome imaju neprebrojive skupove, moraju, s obzirom na Skolem--Lowenheimovu teoremu, biti zadovoljivi u prebrojivo beskonačnom domenu.

skup. (1) Agregat. (2) U Godel-von Neumann-Bernaysovoj teoriji skupova, gde je načinjena razlika između skupova i klasa, skupovi jesu oni objekti koji mogu i sadržati članove i biti članovi nekog drugog objekta.

sled, relacija s. Za datu relaciju **R**, između dva objekta *x* i *y*, postoji relacija **R****, ako i samo ako *y* ima svako svojstvo **R**-nasleđivanja koje ima i *x*. Svojstvo se naziva ***R**-nasleđivanje* onda kada, ako je ispravno dati ga kao predikat za *b* i ako *a***R***b*, onda je takođe ispravno dati ga kao predikat za *a*. Na primer, neka **R** bude svojstvo 'jeste sledbenik'. Tada 'jeste prirodan broj' (gde se ovo svojstvo takođe pridaje i za 0) jeste **R**-nasleđivanje, pošto ako je *b* prirodan broj, a *a* je sledbenik od *b*, tada je *a* takođe prirodan broj. S obzirom na ovu činjenicu, možemo odrediti svojstvo 'jeste prirodan broj' kao svojstvo svih objekata koji su u relacija sleda prema 0 za relaciju 'je sledbenik od' - to jest, kao svojstvo svakog objekta koji je 'sledbenik od' - odnosno koji imaju svojstvo nasleđivanja koje ima i 0. Jedno od ovih svojstava je i 'jeste prirodan broj', pa prema tome samo prirodni brojevi mogu zadovoljiti ovu definiciju.

sledbenik. Za dati broj, broj koji ga sledi u uobičajenom uređenju brojeva. U Peanovom aksiomatskom pristupu aritmetici 'sledbenik' je uzeto kao primitivan termin. Različiti pristupi aritmetici iz aspekta teorije skupova definišu ga na različite načine. Na primer, 'sledbenik od *a*' je ponekad određeno kao jedinačni skup čiji je jedini član *a*.

slika. Članovi konverznog domena relacije koji su vrednosti relacije onda kada njen argument predstavlja član skupa koji je deo njenog domena.

slobodna varijabla. Slobodna varijabla formule *A* je varijabla iz *A* koja nema nijedno vezano događanje u *A*.

slobodno događanje varijable. Za datu varijablu *a* koja se događa u datoj dobro obrazovanoj formuli *A*, događanje *a* u delu *A* koji nije dobro obrazovan a koja ima oblik 'Za svako *a*, *B*' ili oblik 'Za neko *a*, *B*'.

smisao. Vidi **značenje, Fregeova teorija z.**

sorit. Lanac silogizama u kojem je konkluzija svakog od prosilogizama ispuštena. Ako svaka od konkluzija obrazuje minor premisu sledećeg episilogizma, onda je taj sorit *aristotelovski* sorit; ako svaka od konkluzija obrazuje major premisu sledećeg episilogizma, onda je on *goklenovski* sorit.

srednji termin. U kategoričkom silogizmu, termin koji se događa u obe premise ali ne i u zaključku.

stratifikacija. Zamena numerala za varijable u nekoj formuli (tj. isti numeral za svako događanje neke proste varijable) tako da je simbol za klasu-članstvo uvek ograničen pomoću varijabli numeralima, shodno njihovom rastućem sledu.

subaltern genera. Vidi **klasifikacija**.

subkontrarni iskazi. Dva iskaza koja ne mogu oba biti lažna ali oba mogu biti istinita. Bilo koji *I*- i *O*-iskazi sa istim subjektom i istim predikatom obrazuju par subkontrarnih iskaza.

subalternacija. Relacija između univerzalnog i partikularnog iskaza istog kvaliteta. Ova je relacija tradicionalno bila shvatana tako što univerzalni iskaz povlači partikularni iskaz. Univerzalni iskaz se zove *subalternantni*, partikularni iskaz se zove *subalternirani*.

subjek(a)t. Reč ili reči u kategoričkom iskazu koje denotiraju objekat kojem je pripisano svojstvo ili klasu koja je ili uključena u ili isključena iz neke druge klase.

substitucija, aksioma s. Vidi **zamena, aksioma z.**

sud. (1) Potvrđivanje ili pobijanje iskaza. (2) Iskaz koji je potvrđen ili pobijen.

suma skup. Za dati skup *a*, skup čiji članovi su svi i samo oni objekti čiji članovi predstavljaju članove iz *a*.

suma-skup, aksioma s. Aksioma teorije skupova koja tvrdi da za bilo koji skup *a* postoji njegov suma skup.

suma skupova. Vidi **unija skupova**.

summum genus. Vidi **klasifikacija**.

supozicija. Grubo govoreći, svojstvo termina kada on stoji namesto nečega; učenje o supoziciji je bilo ekstenzivno razvijeno kod srednjovekovnih logičara. *Materijalnu* supoziciju poseduju oni termini koji stoje namesto nekog izraza; a *formalnu* supoziciju poseduju oni termini koji stoje za ono što oni označavaju. Među terminima koji poseduju formalnu supoziciju, oni koji su opšti termini imaju *opštu* supoziciju, a oni koji su na odgovarajući način primenljivi na samo jednu individuu imaju *diskretnu* supoziciju. Kada u datom događanju opšti termin stoji namesto univerzalnog, on ima **prostu** supoziciju; nasuprot ovome je *lična* supozicija, svojstvo koje poseduje opšti termin u onim događanjima kada stoji namesto pojedinačnih slučajeva.

tautologija. Složeni iskaz koji je istinit bez obzira na istinosne vrednosti koje su pripisane iskazima koji su u njemu sadržani. Tako, '*A* ili ne-*A*' je tautologija, pošto ako je '*A*' istinito, onda je istinit ceo iskaz, a ako je '*A*' lažno, onda je 'ne-*A*' istinito, pa prema tome je i dalje istinit ceo iskaz.

teorema. Bilo koja dobro obrazovana formula datog logističkog sistema za koju u tom sistemu postoji dokaz.

teorema dedukcije. Za dati iogistički sistem, metateorema koja tvrdi da ako u sistemu postoji dokaz za A_{n+1} iz asumpcija A_1, A_2, ..., A_n, tada u sistemu takođe postoji dokaz za iskaz 'ako A_n, onda A_{n+1}' koji je dobijen iz asumpcija A_1, ..., A_{n-1}.

teoremska shema. Predstavljanje beskonačnog broja teorema pomoću izraza koji sadrže sintaksičke varijable koje kao

vrednosti ima dobro obrazovane formule. Svaka vrednost tog izraza uzima se kao teorema.

teorija tipova. Teorija, koju su u *Principia Mathematica* uveli Bertrand Russell i A.N. Whitehead, koja odoleva paradoksima teorije skupova tako što su preinačena pravila formiranja intuitivne teorije skupova. U *prostoj teoriji tipova* jedina preinaka sastoji se u tome što je svakoj varijabli pripisan broj koji obeležava njen tip, a formule čiji je oblik '*a* je član iz *b*' su dobro obrazovane ako i samo ako je broj tipa od *a* manji od broja tipa od *b*. U *razgranatoj teoriji tipova* svaka varijabla je takođe pripisana nekom pojedinačnom nivou, a uvedena su izvesna pravila o nivoima varijabli; ova pravila su takva da isključuju klase definisane putem impredikativnih definicija.

termin (term). Tradicionalno, subjekt ili predikat u kategoričkom iskazu. Neki autori reč 'termin' proširuju kako bi obuhvatili sva događanja kategorematičkih reči ili izraza koji, mada sami po sebi nisu iskazi, predstavljaju delove iskaza.

tertium non datur. Zakon isključenja trećeg (srednjeg). Vidi **zakoni mišljenja**.

tilda. Ime simbola za negaciju (~).

tip. (1) Vidi **znak**. (2) U teoriji tipova, klasa objekata čiji svi članovi su takvi da mogu biti članovi istog objekta. Najniži je tip složen od svih individua, sledeći tip od svih skupova individua, a svaki tip nakon njih od skupova čiji članovi su objekti tipa koji mu neposredno prethodi.

tipična neodređenost. Vidi **sistematska neodređenost**.

transfinitna indukcija. Dokaz putem indukcije po vrednosti pri čemu su brojevi koji u njemu učestvuju ordinalni brojevi. Ovaj tip dokaza značajan je zbog toga što može biti upotrebljen da se pokaže da svojsvo važi ne samo za konačne kardinale već takođe i za transfinitne ordinale.

transfinitna rekurzija. Definicija funkcije pomoću rekurzije na takav način što je neka vrednost pripisana ne samo kada je argument konačan ordinal već takođe i onda kada je on transfinitni ordinal.

transfinitni kardinali. Svi kardinalni brojevi koji su jednaki sa ili veći od aleph-nula ($\aleph_0$).

transfinitni ordinal. Tip reda nekog beskonačnog dobro uređenog skupa.

transpozicija. Pravilo zaključivanja koje dopušta da se iz istinitog '*A* implicira *B*' izvede istinito 'Ne-*B* implicira ne-*A*', i obrnuto.

tranzitivna relacija. Vidi **relacija**.

trihotomija, zakon t. Vidi **komparabilnost, zakon k**.

Turing-izračunljivo. Koristi se za funkciju čiju vrednost, za bilo koji dati argument, Turingova mašina može izračunati. Pojam Turingove izračunljivosti, koji dugujemo A.M. Turingu, obično se uvodi kao način davanja preciznog pojma efektivno izračunljive funkcije.

Turingova mašina. Mašina koja je u neko pojedinačno vreme u mogućnosti da bude u nekom konačnom broju unutrašnjih stanja. Mašina je opremljena linearnom trakom izdeljenom na kvadrate u koje se mogu ali ne moraju ubeležiti simboli (iz ustanovljenog konačnog alfabeta). Ona registruje jedan i samo jedan kvadrat u bilo koje dato vreme i može izbrisati simbol iz registrovanog kvadrata i ubeležiti na njega neki drugi simbol. Ponašanje mašine (koja obuhvata promene onoga što je u registrovanom kvadratu, menjanje njenih unutrašnjih stanja, kao i kretanje trake tako da bi se registrovao različiti kvadrat) je vođeno *tabelom* sa uputstvima koja određuju šta mašina treba da uradi kada je data bilo koja *konfiguracija* (u koju ulazi kombinacija određenog stanja u kojem je mašina i određeni simbol na registrovanom kvadratu) mašine.

unija skupova (suma skupova). Skup čiji članovi jesu svi i samo oni objekti koji su članovi barem jednoga od dva ili više skupova.

univerzalna instancijacija, pravilo u.i. Pravilo zaključivanja koje dopušta da se iz stava čiji je oblik 'Svojstvo *P* važi za sve objekte' izvede stav čiji je oblik 'Svojstvo *P* važi za objekat *a*'.

univerzalna generalizacija, pravilo u.g. Pravilo zaključivanja koje dopušta da se iz formule čiji je oblik 'Svojstvo *P* važi za objekat *a*' izvede formula čiji je oblik 'Svojstvo *P* važi za sve objekte'. Zato što ovo zaključivanje nije generalno validno neophodno je utvrditi ograničenja u njegovoj upotrebi.

univerzalni kvantifikator. Simbol ( ) ili (∀), čita se kao 'za svako'. Upotrebljava se u kombinaciji sa varijablom i stavlja se ispred dobro obrazovane formule, kao u slučaju '(*a*)__' ('Za svako *a*, __').

univerzalni skup. Skup takav da ne postoji nijedan objekat *a* koji nije član tog skupa.

univerzum govora. Oni objekti na koje je usredsređen neki govor.

upotreba termina. Vidi **pominjanje termina**.

uređen, dobro. Skup A je dobro uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da je *a* prosto uređen pomoću **R** i gde za svaki neprazan podskup iz *a* postoji prvi element tog nepraznog skupa.

uređen par. Za date objekte *a* i *b*, uređen par <*a*,*b*> jeste parni skup čiji jedan član je jedinični skup čiji jedini član je *a*, a drugi član je parni skup čiji su članovi *a* i *b*.

uređen, parcijalno. Skup *a* je parcijalno uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da za svako *b*, *c*, i *d* koji su članovi *a*, (1) ako *b***R***c* i *c***R***d*, onda *b***R***d*, i (2) nije slučaj da *b***R***b*.

uređen, prosto. Skup *a* je prosto uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da je *a* parcijalno uređen pomoću **R** i da za svako *b* i *c* koji su članovi *a* i nisu identični važi ili *b***R***c* ili *c***R***b*.

uređenje, tip u. Skup svih skupova koji su ordinalno slični datom skupu. Vidi **ordinalno sličan**.

uređenje, očuvanje u. Vidi **jedan-jedan korespondencija**.

uslov. *Nužan uslov* je okolnost u čijem odsustvu se dati događaj ne bi mogao dogoditi ili data stvar ne bi mogla postojati. *Dovoljan uslov* je takva okolnost da kada god ona postoji data stvar se događa ili data stvar postoji. Prema tome, *nužan i dovoljan uslov* za zbivanje datog događaja, ili postojanja date stvari, jeste okolnost u čijem odsustvu se događaj ne bi mogao dogoditi, ili stvar ne bi mogla postojati, a koja je takođe takva da kada god je prisutna taj događaj se zbiva, ili ta stvar postoji.

Ova je terminologija ponekad proširena i na formalne relacije koje postoje između iskaza. Tako, kaže se da je istina iskaza *A* nužan uslov za istinu drugog iskaza *B* ako *B* implicira *A* i kaže se da je istina *A* dovoljan uslov za istinu *B* ako *A* implicira *B*.

validna formula. Dobro obrazovana formula koja je validna u svakom nepraznom domenu. Kaže se da dobro obrazovana formula treba da je validna za dati domen individua ako je istinita za sve moguće vrednosti njenih slobodnih varijabli.

validno zaključivanje. Zaključivanje kod kojeg istovremeno tvrđenje njegovih premisa i pobijanje njegovog zaključka predstavlja kontradikciju.

Vennov dijagram. Modifikacija, koju je prvi uveo John Venn, Eulerovih dijagrama. Ključna razlika između Eulerovih dijagrama i Vennovih dijagrama proističe iz činjenice da je Venn, kao i mnogi drugi logičari, želeo da ospori tradicionalnu pretpostavku po kojoj iskazi, čiji je oblik 'Sva *P* su *Q*' ili 'Ne *P* su *Q*', povlače da postoji *P*.

vezana varijabla. Vezana varijabla formule *A* jeste varijabla koja ima vezano događanje u *A*.

vezano događanje varijable. Događanje varijable *a* u dobro obrazovanom delu formule *A* čiji oblik je ili 'za svako *a*, *B*', ili 'postoji *a* takvo da *B*'.

veznik. Simbol koji je upotrebljen sa jednom ili više konstanti ili formula kako bi se proizvela nova konstanta ili formula. Kada se radi o iskaznim veznicima ili konstantama, veznik je *iskazni veznik* (ili *rečenički veznik*). Najčešći iskazni veznici su negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija i bikondicional. Oni su raspoređeni u *proste (singularne), binarne*, itd., već prema tome koji broj iskaznih konstanti ili formula kombinuju.

wff. Uobičajena skraćenica za dobro obrazovanu formulu ('**w***ell* **f***ormed* **f***orm*(*ula*)'), odnosno, dobro obrazovane formule (wffs, odnosno, '**w***ell* **f***ormed* **f***orm*(*ula*)*s*').

vlastita klasa. Objekat koji sadrži članove ali koji ne može sam biti član bilo kojeg objekta.

vlastiti podskup. Podskup datog skupa koji nije istovetan sa datim skupom.

vrednost funkcije. Onaj član konverznog domena funkcije sa kojim je dati argument u paru u okviru date funkcije.

vrednost. Član obuhvaćen obimom vrednosti date varijable.

vrsta. Vidi **klasifikacija**.

zadovoljiva, biti z. Dobro obrazovana formula koja je zadovoljiva u nekom nepraznom domenu individua.

zadovoljivo u nekom domenu. Dobro obrazovana formula je zadovoljiva u datom domenu individua ako i samo ako ima istinitu vrednost za barem jedan sistem mogućih vrednosti njenih varijabli.

zaključivanje. Izvođenje iskaza (konkluzije) iz skupa drugih iskaza (premisa). Kada je zaključivanje prihvatljivo premise pružaju dobre razloge za tvrđenje, odnosno pouzdanost zaključka.

zakoni mišljenja. Tri zakona logike koja su bila tradicionalno obradivana kao osnovna i temeljna za celokupno mišljenje.To su (1) *zakon kontradikcije*, da ništa ne može biti i *P* i ne-*P*, (2) *zakon isključenja srednjeg*, da sve mora biti ili *P* ili ne-*P*, i (3) *zakon identiteta*, da ako je bilo šta *P*, onda je ono *P*.

zamena, aksioma z. (aksioma supstitucije). Aksioma teorije skupova koja utvrduje da za bilo koji skup *a* i bilo koju funkciju proste vrednosti **R** sa slobodnom varijablom *b* postoji skup koji sadrži baš članove **R**(*b*), sa takvim *b* koje je član *a*.

zamena, pravilo z. Pravilo zaključivanja koje dopušta da se iz date formule *A* izvede druga formula *B* koja je ista kao *A*, s izuzetkom izvesnih odredenih promena u simbolima. Različita pravila zamene (supstitucije) razlikuju se u tipovima promena koje omogućuju.

zatvaranje formule. Formula koja je obrazovana tako što je ispred formule *A* postavljen kvantifikator koji vezuje sve varijable koje se događaju slobodne u *A*. *Univerzalno* zatvaranje predstavlja for-mula koja je obrazovana tako što je upotrebljen samo univerzalni kvantifikator, a *egzistencijalno* zatvaranje predstavlja formulu koja je obrazovana tako što je upotrebljen samo egzistencijalni kvantifikator.

zatvoren s obzirom na relaciju (zatvoren pod relacijom). Skup je zatvoren pod relacijom *R* ako i samo ako za svako *a*, ako *aRb* i ako je *a* član tog skupa, onda je *b* član tog skupa.

zatvorena rečenica (zatvorena shema). Rečenica (ili shema) koja nema nijednu slobodnu varijablu.

zbirni (kolektivni) termin. U tradicionalnoj logici, termin koji označava zbirku (kolekciju) objekata koji već tvore jedinstvo. Primer je 'Alpi'.

Zermelo-Fraenkelova teorija skupova. Onaj oblik aksiomatske teorije skupova koji izbegava paradokse teorije skupova na taj način što izostavlja aksiomu apstrakcije i zamenjuje je skupom aksioma o postojanju skupa.

značenje, Fregeova teorija z. Prema ovoj teoriji, koju je 1892. izneo Gottlob Frege, značenje vlastitog imena ima dva aspekta,

smisao i *referenciju*. Referencija vlastitog imena jeste ono čega je to ime. Tako referencija od 'ser Walter Scott' jeste ser Walter Scott. Frege je branio stanovište da mora postojati, pored referencije, još jedan aspekt značenja takvih imena. 'Ser Walter Scott' i 'autor Waverleya' (the author ...) imaju istu referenciju, ali bi bilo nezadovoljavajuce reci da oni imaju isto značenje. Aspekt značenja koji čini različitim 'ser Walter Scott' od 'autor Waverleya' zove se smisao vlastitog imena.

Treba napomenuti da je ovo teorija značenja vlastitih imena, a ne i opštih imena (tj. zajedničkih imenica). John Stuart Mill je za opšta imena prvi uveo svoju distinkciju između *denotacije* (objekata na koje je opšte ime na odgovarajući način primenjeno) i *konotacije* (karakterističnog skupa odlika koji određuje na koje se objekte opšte ime na odgovarajući način primenjuje). Za razliku od Fregea, Mill je smatrao da je značenje vlastitog imena naprosto ono što ono denotira.

znak (token). Specifikovano izricanje datog lingvističkog izraza ili njegovo događanje u pisanom obliku. S druge strane, *tip*-izraz (type) predstavlja entitet apstrahovan iz svakog od aktualnih i potencijalnih događanja nekog lingvističkog izraza. Na primer, u slučaju 'John voli Johna', postoje tri znak-reči ali samo dve tip-reči.

znak tvrđenja. Znak $\vdash$, koji je uveo Gottlob Frege kako bi u objekt-jeziku ukazao da je iskaz procenjen kao istinit i pored toga što još nije imenovan. Neki autori sada koriste ovaj znak u meta-jeziku da bi izrazili da je formula pred koju je postavljen teorema objekt-jezika.

E. J. Lemmon
Upoznavanje sa logikom

***prilozi:* A. N. Prior, J. van Heijenoort, B. A. Brody**

DRUŠTVO FILOSOFA I SOCIOLOGA CRNE GORE
Filosofski fakultet
81 400 Nikšić

PHILOSOPHOTHECA ALETHEIA
knjiga 2

urednik
Bogoljub Šijaković

preporuka za štampu
Vladan Perišić
Bogoljub Šijaković

kompjuterska obrada
Slobodan Zečević

CIP - Katalogizacija u publikaciji

161/162/164

LEMMON, E. J.
Upoznavanje sa logikom / E. J. Lemmon ; preveo Vladimir Marko ; redigovala Svetlana Zečević. - Nikšić : Društvo filosofa i sociologa Crne Gore, 1995. - 356 str. ; 20 cm. - (Philosophotheca ALETHEIA, knj. 2)

Prevod dela : Beginning Logic / E. J. Lemmon. - PRILOZI: Modalna logika, Polivalentna logika, Deontička logika / A. N. Prior. - Logički paradoksi / John van Heijenoort. - Glosar logičkih termina / Boruch A. Brody : str. 229-355.

Simboli iskaznog i predikatskog računa

ε jeste (ima)
ε′ nije (nema)
¬, N ne
∧, K i
∨, A ili (lat. *vel*)
→, C ako ..., onda ...
↔ ekvivalentno
⋀x, ∀ za sve x važi
⩓x za sve x važi (pri čemu je područje varijabilnosti x indefinitno)
⋁x, ∃ postoji najmanje jedno x za koje važi
⩔x postoji najmanje jedno x za koje važi (pri čemu je područje varijabilnosti x indefinitno)
⤙ implicira (iz ... slijedi ...)
⊩ iz ... slijedi ...
↑ Scheffer, ↓ Łukasiewicz

Simboli pravila i računa

⇒ dopušteno je od ... preći ka ...
⇔ dopušteno je od ... preći ka ... i obrnuto izvodivo (derivabilno) je
⫤⊢ međuizvodivo (interderivabilno) je
=*df*, — := po definiciji isto

Simboli relacija

= jednako, ≠ nije jednako
≡ identično, ≢ nije identično ekvivalentno
< manje
≤ manje ili jednako
> veće
≥ veće ili jednako

Simboli modalne logike

◊, M moguće je da
□, L nužno je da
⥽ striktna implikacija

Simboli silogistike

S subjekt
P predikat
a affirmo universaliter (tvrdim univerzalno)
i affirmo partialiter (tvrdim parcijalno)
e nego universaliter (negiram univerzalno)
o nego partialiter (negiram parcijalno)

Simboli teorije skupova

∅ prazan skup
∈ elemenat od, ∉ nije elemenat od
⊂ sadržano u (podskup od)
∪ unija (unija od ... i ...)
∩ presjek (presjek od ... i ...)

Nije lako, a možda nije čak ni korisno, objasniti ukratko šta je to logika. Kao i većina predmeta, ona obuhvata mnoge različite vrste problema i nema jasno utvrđene granice; jednim krajem ona zadire u matematiku, drugim u filozofiju. Najbolji način da se otkrije šta je to logika jeste da se sa njom uhvati u koštac. Bezmalo, tek nekoliko opštih ocena o ovom predmetu može biti od pomoći da se pruži osnova za dalji tok ove knjige.

Logika se uglavnom bavi osnovanošću i neosnovanošću argumenata (with the soundness and unsoundness of arguments) i pokušava da sačini što je moguće preciznije uslove pod kojima je neki argument - bez obzira na oblast izučavanja - prihvatljiv. Ovaj stav iziskuje izvesno pojašnjenje: prvo, neophodno je da kažemo šta je to argument; drugo, šta shvatamo pod osnovanošću; treće, kako možemo preciznije sačiniti uslove za osnovanu argumentaciju; i četvrto, kako ovi uslovi mogu biti nezavisni od oblasti unutar koje je argumentacija derivirana. Nastavimo onda dalje polazeći od ovih tema.

Ta su izvođenja još jednostavnija ako uvedemo konstantu *E* sa značenjem 'ne-*S*' (t.j. 'Ništa rđavo se ne događa') i izjednačimo 'Treba da bude slučaj da *p*' sa 'Ako *E* tada-nužno *p*' (tj. Ako se ništa rdavo neće dogoditi, tada-nužno dogodiće se *p*'). Kao ilustraciju, razmotrimo načelo da ako treba da bude slučaj da *p*, tada ako treba da bude slučaj da ako-*p*-onda-*q*, onda treba da bude slučaj da *q*. Ako se 'treba' definiše kako je to predloženo, ovaj zakon predstavlja zapravo isto što i poseban slučaj sledećeg zakona modalne logike:

> Ako *r* nužno implicira na *p*, tada ako *r* takođe nužno implicira na *p* nužno implicira na *q*, tada *r* nužno implicira na *q*.

Poseban slučaj jeste onaj u kojem *r* predstavlja 'izbegavajući uslov' *E* (escape clause). Jedino značajno načelo deontičke logike koje nije na ovaj način svodivo na poseban slučaj običnih modalnih načela jeste zakon da što god je obavezujuće jeste dopustivo, ili da ništa nije istovremeno i obavezujuće i zabranjeno. Ono glasi:

> Ako *E* nužno implicira na *p*, onda *E* nužno ne implicira na ne-*p*.

Ako bi *E* imalo oblik '*p* i ne-*p*' ono *bi onda* istovremeno i nužno impliciralo *p* i nužno impliciralo ne-*p*, tako da bi u običnoj modalnoj logici ovaj zakon mogao imati izuzetke. Takvi izuzeci bi bili nedopušteni, dok bi sam zakon bio osnovan samo ukoliko bismo modalnoj logici, uz definiciju 'treba', dodali i aksiom koji bi sadržao to da *E* nije nemoguće - to jest da *možemo* izbeći izvršavanje radnje koja je rđava.

Ovaj način pojednostavljivanja deontičke logike pronašao je A.R. Anderson, koji ga je opet sam izveo iz sugestije H.G. Bohnerta o tome da se imperativne rečenice čiji je oblik 'Učini X' mogu shvatiti kao indikativne rečenice čiji je oblik 'Učinićeš X, ili u suprotnom' - to jest, 'Ako ne učiniš *X*, takva i takva nevolja će te snaći', ili 'Ako bi da izbegneš ovu nevolju, učinićeš X'. U svojem prvobitnom obliku Andersonova teorija je ovu sugestiju naprosto prenela na 'treba' i ustanovila da 'Obavezujuće je da *p*' znači 'Ako *p* nije učinjeno, onda-nužno biće primenjena neka sankcija ili kazna'. Ovo je podložno primedbi [illegible] Iako god da to bilo vredno sažaljenja, moguće je učiniti ono

univerzalni skup. Skup takav da ne postoji nijedan objekat *a* koji nije član tog skupa.

univerzum govora. Oni objekti na koje je usredsređen neki govor.

upotreba termina. Vidi **pominjanje termina**

uređen, dobro. Skup A je dobro uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da je *a* prosto uređen pomoću **R** i gde za svaki neprazan podskup iz *a* postoji prvi element tog nepraznog skupa.

uređen par. Za date objekte *a* i *b*, uređen par <*a,b*> jeste parni skup čiji jedan član je jedinični skup čiji jedini član je *a*, a drugi član je parni skup čiji su članovi *a* i *b*.

uređen, parcijalno. Skup *a* je parcijalno uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da za svako *b*, *c*, i *d* koji su članovi *a*, (1) ako *b***R***c* i *c***R***d*, onda *b***R***d*, i (2) nije slučaj da *b***R***b*.

uređen, prosto. Skup *a* je prosto uređen ako i samo ako postoji relacija **R** takva da je *a* parcijalno uređen pomoću **R** i da za svako *b* i *c* koji su članovi *a* i nisu identični važi ili *b***R***c* ili *c***R***b*.

uređenje, tip u. Skup svih skupova koji su ordinalno slični datom skupu. Vidi **ordinalno sličan**.

uređenje, očuvanje u. Vidi **jedan-jedan korespondencija**.

uslov. *Nužan uslov* je okolnost u čijem odsustvu se dati događaj ne bi mogao dogoditi ili data stvar ne bi mogla postojati. *Dovoljan uslov* je takva okolnost da kada god ona postoji data stvar se događa ili data stvar postoji. Prema tome, *nužan i dovoljan uslov* za zbivanje datog događaja, ili postojanja date stvari, jeste okolnost u čijem odsustvu se događaj ne bi mogao dogoditi, ili stvar ne bi mogla postojati, a koja je takođe takva da kada god je prisutna taj događaj se zbiva, ili ta stvar postoji.

Ova je terminologija ponekad proširena i na formalne relacije koje postoje između iskaza. Tako, kaže se da je istina iskaza *A* nužan uslov za istinu drugog iskaza *B* ako *B* implicira *A* i kaže se da je istina *A* dovoljan uslov za istinu *B* ako *A* implicira *B*.

validna formula. Dobro obrazovana formula koja je validna u svakom nepraznom domenu. Kaže se da dobro obrazovana formula treba da je validna za dati domen individua ako je istinita za sve moguće vrednosti njenih slobodnih varijabli.

teorije skupova jeste da se za bilo koji skup A, skup podskupova iz A, moć skupa $\wp A$, nije ekvivalentano sa A, dok je A ekvivalentno podskupu $\wp A$. Prema tome, kardinalan broj za A manji je od kardinalnog broja za $\wp A$. Neka je S skup svih skupova. Njegova moć skupa, $\wp S$, ima veći kardinalni broj i sadrži više skupova nego S, dok su, s druge strane, u S sadržani svi skupovi. Ovaj paradoks Cantor je saopštio Richardu Dedekindu u pismu datiranom 31. avgusta, 1899. (*Gesammelte Abhandlungen*, s.448) i danas je on poznat kao Cantorov paradoks.

Russellov paradoks: Na prelazu stoleća paradoksi Burali-Fortija i Cantora predstavljali su predmet žive rasprave među matematičarima koji su se bavili teorijom skupova. Juna 1901 Bertrand Russell, razmatrajući ova dva paradoksa i analizirajući njihovu strukturu, došao je do novog paradoksa, onog o skupu svih skupova koji ne sadrže sami sebe kao elemente. Skup r, "Russellov skup", određen je sledećim uslovom:

za svako x, $x \varepsilon r$ ako i samo ako $x \notin x$.

Pomoću zamene dobijamo

$r \varepsilon r$ ako i samo ako $r \notin r$.

Russellov paradoks značajan je zbog činjenice da se služi samo pojmovima 'skup' i 'element skupa'. Paradoksi Burali-Fortija i Cantora mogu biti pripisani tehničkim teškoćama Cantorove teorije skupova; zbog toga se činilo da oni predstavljaju pre problem koji se tiče matematičara nego logičara ili filozofa. Međutim, Cantorova teorija bila je predmet mnogih kritika, nezavisno od ovih paradoksa.

Sa Russellovim paradoksom situacija je sasvim drugačija. On barata ogoljenim pojmovima skupa i elementa, a ne novim i možda sumnjivim rezultatima koji se tek posredno odnose na skupove. Russell je ovaj paradoks saopštio Fregeu u pismu od 16. juna 1902. (John van Heijenoort, *A Source Book in Mathematical Logic*). Frege je odmah odgovorio (22. juna 1902, *ibid.*), tvrdeći da je otkriće ovoga paradoksa uzdrmalo temelj sistema logike na kojem je on nameravao da izgradi aritmetiku.

'Kontradikcija', kako je Russell nazvao svoj paradoks, razmatra se u Poglavlju 10 u *The Principles of Mathematics*. Taj deo, koji je očigledno pisan 1901, predlaže da se između klase i

elemenata klase načini razlikovanje u tipu i ujedno iznosi tvrdnju da to predstavlja "ključ cele ove misterije u razlikovanju logičkih tipova" (*Sect.* 104). Pre nego što je ova knjiga objavljena, Russell je osetio da ovaj problem zaslužuje veću pažnju i napisao je Dodatak B, čija dužina je gotovo šest stranica, u kojem je učenje o tipovima "probno" izloženo, pošto "pre nego što pruži odgovore na sve teškoće, po svemu sudeći, ono iziskuje da bude preobraženo u tananije obličje". U *The Principles of Mathematics* Russell se takođe bavi i Burali-Fortijevim paradoksom, koji on pokušava da reši pobijajući to da je skup svih ordinalnih brojeva dobro uređen.

Decembra 1905. (*On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*) Russell je napustio teoriju tipova; da bi se paradoksima teorije tipova pristupalo na približno ujednačen način on je predložio tri teorije: (1) *cik-cak teoriju*, (2) *teoriju ograničenja veličine*, (3) *teoriju praznih klasa* (the no-classes theory).

Russellov paradoks nestao bi ako bi iskaznoj funkciji $x \varepsilon x$ odgovarala prazna klasa r tako da

$$(x)(x \varepsilon r = x \varepsilon x)$$

tako da svaka iskazna funkcija ne bi određivala klasu. U cik-cak teoriji iskazna funkcija ne određuje klasu ako je funkcija "komplikovana i teško razumljiva". Problematične klase prestaju da postoje, ne zbog toga što bi one bilo isuviše "velike" već zato što bi pokazivale izvestan cik-cak kvalitet (x je u r ako i samo ako x nije u x, što je sličan slučaj i kod nekih Cantorovih argumenata). Za iskaznu funkciju koja određuje klasu kaže se da je predikativna i Russell predlaže da se obrazuju aksiomi koji bi odlikovali predikativne iskazne funkcije. Ali on je ipak morao priznati da u pokušaju da se to učini nije pronašao "nijedno rukovodeće načelo sem izbegavanja kontradikcija; a to je, samo po sebi, sasvim nedostatno načelo pošto nas uvek stavlja pred opasnost da će dedukcije koje dalje slede navesti na kontradikciju".

U teoriji ograničenja veličine provera predikativnosti se više se ne sastoji u jednostavnosti u formi već u izvesnom ograničenju u pogledu veličine. Klase prestaju da postoje ako bi bile isuviše "velike". Na primer, ordinali ne obrazuju klase pa tako iščezava Burali-Fortijev paradoks. Međutim, Russell je uvideo teškoću toga gde se zaustaviti na skali ordinala.

stavljala je pokušaj da se utvrdi i ograniči pojam skupa. Russellovi i Zermelovi pristupi rešenju teškoća koje su nastale kao posledica paradoksa bili su sasvim različiti. Prvi je bio dalekosežna teorija od velikog značaja za logiku i čak ontologiju, dok je drugi bio neposredni odgovor pritiscima koji su proizišli iz potreba praktičnih matematičara.

Zermelova temeljna ideja nalik je, ako se to uopšte može reći, Russellovoj teoriji ograničenja veličine, iznetoj 1905; obojica su odbila da kao skupove usvoje one zbirke (collections) koje su isuviše 'velike'. Svoj cilj Zermelo je ispunio time što je skupovima nametnuo aksiome. Skupovi nisu više 'zbirke' prihvatljive za naše intuicije; oni su objekti koji zadovoljavaju određene aksiome. Zermelo je upotrebio iznenađujuće mali broj aksioma. Na početku je uveden nula skup, ∅; kada imamo određene skupove, tada je za ove skupove postojanje unije, preseka, moć skupova obezbeđena odgovarajućim aksiomama; 'određena svojstva' razdeljuju podskupove od datih skupova; skup (∅,(∅),((∅)),...) uveden je pomoću aksioma beskonačnosti; i tako dalje. Nijedan aksiom ne dozvoljava uvođenje skupa svih skupova; baš kao što ovaj skup ne postoji u teoriji, tako ne postoji ni skup svih ordinala, niti Russellov skup. S druge strane, aksiomi omogućuju derivaciju teorema koje su matematičari priželjkivali u praktičnoj teoriji skupova. Pošto je konzistencija sistema ostala nedokazana sasvim je prihvatljivo da se u teoriji mogu pojaviti novi paradoksi. Jedino što možemo proveriti jeste to da se ne mogu ponovo pojaviti argumenti koji su vodili ka do sada poznatim paradoksima. S obzirom na Gödelovu teoremu (1931), sam pojam dokaza konzistencije za teoriju skupova povezan je sa temeljnim teškoćama. Nakon Zermela, aksiomatsku teoriju skupova su tokom 1920-tih razvili A.A. Fraenkel, Thoralf Skolem i John von Neumann, a poznih 1930-tih Paul Bernays i Kurt Gödel, kao i mnogi drugi nakon njih. Ona je prerasla u živ i prostran domen istraživanja, a povratak na naivno, intuitivno stanovište o skupovima čini se da više nije moguć.

Sintaksički i semantički paradoksi

Izvesno svetlo na prirodu paradoksa bacila je ocena Giuseppe Peana. Komentarišući Richardov paradoks, Peano je 1906. pisao (*Aditione*, p.157): "Richardov primer ne pripada matema-

tici, već lingvistici; izvestan element, koji je temeljan za definiciju *N*, ne može biti određen na egzaktan način (prema pravilima matematike). Iz elementa koji nije dobro određen možemo izvesti nekoliko zaključaka koji su u međusobnoj kontradikciji". Taj element koji ne može biti precizno određen jeste običan jezik i on se uvlači u definiciju *N*, u skup brojeva koji je konačno odrediv u običnom jeziku. Peanovu ideju je 1925. razvio Ramsey (*The Foundation of Mathematics*). U razmatranju teorije tipova, kako je bila predstavljena u *Principia Mathematica*, Remsey je paradokse podelio u dve grupe. Prva grupa uključuje paradokse Russella i Burali-Fortija; druga uključuje paradoks Lažac, kao uostalom i Berryjev i Richardov. Načelo kojim je rukovođena Remseyeva podela sastojalo se u tome što paradoksi prve grupe iziskuju jedino sintaksičke i matematičke pojmove; dok formulacija ovih iz druge grupe zahteva takve pojmove kao što su 'istina', 'definljivost' i 'jezik'. Paradoksi prve grupe nazvani su *sintaksičkim* paradoksima, a oni koji pripadaju drugoj grupi *semantičkim* paradoksima. Semantički paradoksi nisu, kako se čini, posledica tek nekog logičkog nedostatka, već neodredenosti ili dvosmislenosti nekog ne-logičkog pojma; oni pobuđuju probleme koji se tiču jezika i pripadaju, kako Peano kaže, lingvistici.

Prema Remseyu, jedna od posledica razlikovanja između sintaksičkih i semantičkih paradoksa sastoji se u velikom pojednostavljivanju u teoriji tipova; razgranavanje na poretke, koje je Russell naknadno uveo na hijerarhiju tipova, neophodno je samo kada je reč o isključivanju semantičkih paradoksa, a pošto se neodredenošću i dvosmislenošću može rukovati jednostavnijim sredstvima ono se u tim slučajevima može izbeći.

Remseyeva gledišta bila su u celini prihvaćena, a teorija tipova bez razgranavanja na poretke, koja je postala poznata kao prosta teorija tipova (the simple theory of types), bila je u širokoj upotrebi u logičkim istraživanjima. Danas se može postaviti pitanje razlikovanja dve vrste paradoksa. Semantički pojmovi dobili su precizne definicije, obično su dati u terminima pojmova teorije skupova, i čini se da je, ukoliko nasilno ne izvlačimo iz konteksta određene stavove, teško pobiti to da su ovi pojmovi 'logički'. Paradoks Lažac, paradoksi Grellinga i Berryja, kao i neki drugi, sada su u osnovi rešeni ne putem teorije tipova već na osnovu razlikovanja između jezika i meta-jezika, razlike

»U osnovnim crtama, u Poglavlju 1 izučavamo neke elementarne dokaze iskaznog računa i upoznajemo se neposredno sa njegovim pravilima derivacije. U Poglavlju 2, nakon savladavanja rečnika i gramatike ovoga računa, student se upoznaje sa istinosnim tablicama, koje su zatim korištene kao nezavisna kontrola osnovanosti i kompletnosti ovih pravila. Poglavlje 3 predstavlja pravila predikatskog računa i njegove osnovne rezultate, na isti delimično neformalan način kako je to obrađeno i kod iskaznog računa u Poglavlju 1. Poglavlje 4 počinje skiciranjem teorije predikatskog računa (Odeljci 1 i 2), ali nastavlja sa njegovim primenama: prvo, s obzirom na identitet; drugo, s obzirom na tradicionalnu teoriju silogizma; treće, s obzirom na svojstva relacija. Normalne forme, čiji kratak pregled je uvršten u mnoge kurseve logike ali kojima se u logičkim tekstovima ne posvećuje velika pažnja, prebačene su u Dodatak A (koji se može čitati nakon Poglavlja 2, Odeljka 3). Dodatak B uvođenje je u teoriju klasa i može predstavljati sponu između ovoga i tekstova koji su na višem nivou.« (Lemmon)

Knjizi su priloženi enciklopedijski članci o modalnoj, polivalentnoj i deontičkoj logici i o logičkim paradoksima. Na kraju je glosar logičkih termina.